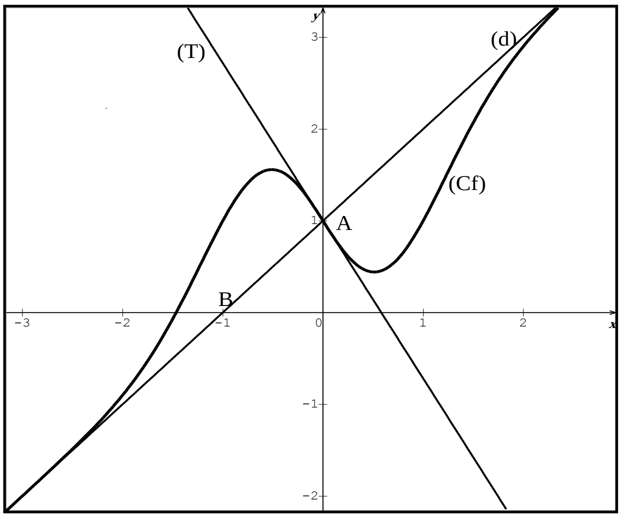
الاختبـــــار الأول فـــي مـــــادة الرياضيـــــات

نهائي علوم تجريبية — **المدة: ساعتان**

التمرين الأول :



الشكل المقابل هو التمثيل البياني $\left(C_f\right)$ الممثل للدالة f والمستقيم $\left(d\right)$

الذي يشمل النقطتين $A(0;1)$ و $B(-1;0)$ و $\left(T\right)$ مماس لـــ $\left(C_f\right)$ عند

النقطة ذات الفاصلة 0

علما أن: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ، $f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ و $f'\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{-1}{2}\right)=0$

بقراءة بيانية: أجب عن الأسئلة التالية

1°) عيّن نهايات f على أطراف D_f

2°) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3°) استنتج أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب إعطاء حصرا له

4°) استنتج إشارة $f(x)$

5°) بيّن أن $f(x)+f(-x)=2$

6°) عيّن معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ و $-\infty$

7°) استنتج الوضع النسبي لـــ $\left(C_f\right)$ مع $\left(T\right)$

8°) أثبت أن النقطة A هي نقطة انعطاف لـــ $\left(C_f\right)$

9°) نعرف على المجال $\left]-1;+\infty\right[$ الدالة g كما يلي: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

أ/ أحسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها

التمرين الثاني :

$I-$ لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{1}{2}x-e^{\frac{x}{2}}$

1°) ادرس تغيرات الدالة g

2°) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

$II-$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(-x-2)e^{-\frac{x}{2}}+2-x$

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البيانـــي في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1°) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2°) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f(x)=(-x-2)\left(e^{\frac{-x}{2}}+1\right)+4$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3°) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{\frac{-x}{2}}g(x)$.

4°) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

5°) أ/ أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]$ ،ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ عيّن إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x+2$

ج/ استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

6°) أثبت أن (C_f) يقبل مماسا يوازي المستقيم (Δ)

7°) أحسب $f(0)$ ثم أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

8°) أحسب $f(-2)$ ثم أنشئ (Δ)،(T) و (C_f) على المجال $\left[-2;+\infty\right[$

9°) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-2)e^{\frac{x}{2}}+x+2=0$

،،، بالتوفيق والنجاح ،،،

تذكر دوما (لا يــأس مع الحيــاة ولا حيــاة مع اليــأس)
هذا الامتحان تجربة لك فاستفد منه ولا تجعله نقطة توقف

ثانوية عبد العزيز الشريف — الموسم الدراسي: 2016/2015

إليك حل نموذجي للاختبـــــار الأول فـــي مـــادة الرياضيـــــات

نهائي علوم تجريبية — المدة: ساعتان

،،، بالتوفيق والنجاح ،،،

التمرين الأول :بقراءة بيانية: أجب عن الأسئلة التالية

1°) تعيين نهايات الدالة f على أطراف D_f : أولا؛ $D_f = \left]-\infty;+\infty\right[$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2°) */ استنتاج إشارة $f'(x)$: كما نعلم أن فواصل القيم الحدية هي انعدام للمشتقة الأولى ، وبيان الدالة f يحوي قيمتين حديتين وعليه تكون الإشارة كالتالي :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

*/ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1,5$	$\searrow$	$0,5$	$\nearrow$	$+\infty$

3°) */استنتاج أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

$f(x) = 0$ بيانيا معناه تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل (xx')

ومن خلال التمثيل البياني نلاحظ أن المنحنى يقطع محور الفواصل مرة واحدة وبالتالي الحل وحيد

إعطاء حصر للحل α : مثلا $-2 < \alpha < -1$ وأي حصر أخر صحيح مقبول

4°) استنتاج إشارة $f(x)$: تذكير $f(x) > 0$ (موجبة) عندما يكون منحناها فوق محور الفواصل

$f(x) < 0$ (سالبة) عندما يكون منحناها تحت محور الفواصل

$f(x) = 0$ (معدومة) لما يقطع منحناها محور الفواصل

وعليه تكون الإشارة كما يلي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5°) بين أن $f(x) + f(-x) = 2$

$A(0;1)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) نعوض النقطة A في قانون مركز التناظر نجد؛ $f(x) + f(-x) = 2$

6°) تعيين معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ و $-\infty$: كما نعلم أن للمستقيم معادلة من الشكل $y = ax + b$

نأخذ نقطتين من المستقيم مثلا $A(0;1)$ و $B(-1;0)$ ، نعوض إحداثيات A و B في معادلة المستقيم نجد

$b = 1$ و $-a + b = 0$ معناه $a = b$ ومنه $a = 1$ وعليه معادلة المستقيم المقارب هي $y = x + 1$

7°) استنتاج الوضع النسبي لـ (C_f) مع (T)

*/ على المجال $\left]-\infty;0\right[$: (C_f) تحت (T)

*/ على المجال $\left]0;+\infty\right[$: (C_f) فوق (T)

*/ (C_f) يقطع (T) عند النقطة $A(0;1)$

8°) أثبت أن النقطة A هي نقطة انعطاف لـ (C_f) : A فعلا نقطة انعطاف لـ (C_f)

تبرير وتذكير : نسمي النقطة التي يخترق فيها المماس منحنى الدالة بنقطة انعطاف

9°) المعطيات : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ ، $D_g=\left[-1;+\infty\right[$

أ/ حساب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$: g قابلة للاشتقاق على D_g لأنها مقلوب دالة قابلة للاشتقاق ومنه

$$g'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

ب/ */استنتاج اتجاه تغير الدالة g : إشارة $g'(x)$ معاكسة لإشارة $f'(x)$ لان المقام موجب دوما والبسط $-f'(x)$

وعليه جدول تغيراتها يكون كالتالي:

توضيح كيفية ملأ الجدول

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$g\left(\frac{1}{2}\right)$ بنفس الكيفية تم حساب $g\left(\frac{-1}{2}\right)=\dfrac{1}{f\left(\frac{-1}{2}\right)}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

انتهى التمرين الأول

التمرين الثاني

" بالتوفيق والنجاح "

$I-$ المعطيات: $g(x)=\frac{1}{2}x-e^{\frac{x}{2}}$ و $D_g=\mathbb{R}$

1°) دراسة تغيرات الدالة g

*/ حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x-\cancel{e^{\frac{x}{2}}}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x-e^{\frac{x}{2}}=+\infty-\infty$ معناه (ح ع ت)

نستخرج $\frac{x}{2}$ عامل مشترك نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(1-\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)=(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$ (تذكير $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u}=+\infty$)

*/ نحسب المشتقة $g'(x)$: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا: $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$

2) لمعرفة إشارة $g'(x)$ نحل المعادلة $g'(x)=0$ ؛

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

$$\frac{1}{2}\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)=0\Rightarrow 1-e^{\frac{x}{2}}=0\Rightarrow e^{\frac{x}{2}}=1\Rightarrow \ln e^{\frac{x}{2}}=\ln 1$$

$$\Rightarrow\frac{x}{2}=0\Rightarrow x=0$$

*/ جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

2°) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$: من جدول التغيرات نستنتج أن $g'(x)<0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

ومنه الإشارة تكون كالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		$-$	

II- **المعطيات** : $f(x)=(-x-2)e^{-\frac{x}{2}}+2-x$ **و** $D_f=\mathbb{R}$

1) **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-2)e^{-\frac{x}{2}}+2-x=+\infty$ **لا توجد حالة عدم تعيين**

2) */ **تبيان أنه من أجل كل** x **من** $\mathbb{R}$ ؛ $f(x)=(-x-2)\left(e^{\frac{-x}{2}}+1\right)+4$: **لدينا**؛

(وهـم) $(-x-2)\left(e^{\frac{-x}{2}}+1\right)+4=(-x-2)e^{\frac{-x}{2}}+(-x-2)+4=(-x-2)e^{\frac{-x}{2}}-x+2=f(x)$

*/ **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-2)\left(e^{\frac{-x}{2}}+1\right)+4=\left(-\infty\right)\times\left(+\infty\right)=-\infty$

3) **إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي** x : $f'(x)=e^{\frac{-x}{2}}g(x)$: f **قابلة للاشتقاق على** $\mathbb{R}$ **ولدينا**

$$f'(x)=-e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}.(-x-2)-1=-e^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}}+-e^{-\frac{x}{2}}-1$$

$$=\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}.e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}\left(\underbrace{\frac{1}{2}x-e^{\frac{x}{2}}}_{g(x)}\right)$$

$$=e^{-\frac{x}{2}}.g(x)$$

،،، بالتوفيق والنجاح ،،،

4) */**استنتاج اتجاه تغير الدالة** f : **إشارة** $f'(x)$ **من إشارة** $g(x)$ **لأن** $e^{-\frac{x}{2}}>0$ **وبما أن** $g(x)<0$ **(سالبة) فان الدالة** f **متناقصة تماما على** $\mathbb{R}$

*/ **جدول التغيرات** :

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

5) أ/ **حساب**: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-2)e^{-\frac{x}{2}}=-xe^{-\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}=0$$

تفسر النتيجة هندسيا: $y=-x+2$ **مقارب مائل لـ** (C_f) **بجوار** $+\infty$

ب/ **تعيين إحداثيات النقطة** B **نقطة تقاطع** (C_f) **مع المستقيم** (Δ) **ذا المعادلة** $y=-x+2$

نحل المعادلة $f(x)-(2-x)=0$: $f(x)-(2-x)=0\Rightarrow(-x-2)e^{-\frac{x}{2}}=0\Rightarrow -x-2=0\Rightarrow x=-2$

ومنه $B\left(-2;f(-2)=4\right)$

ج/ **استنتاج وضعية المنحنى** (C_f) **بالنسبة للمستقيم** (Δ) : **ندرس إشارة الفرق** $f(x)-(2-x)$

مما سبق $f(x)-(2-x)=(-x-2)e^{-\frac{x}{2}}$ **حلها** $x=-2$ **وإشارة الفرق من إشارة** $-x-2$ **لأن** $e^{-\frac{x}{2}}>0$

*/ **على المجال** $\left]-\infty;-2\right[$: (C_f) **فوق** (Δ)

*/ **على المجال** $\left]-2;+\infty\right[$: (C_f) **تحت** (Δ)

*/ (C_f) **يقطع** (Δ) **عند النقطة** $D(-2;4)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

6) **إثبات أن** (C_f) **يقبل مماسا يوازي المستقيم** (Δ) : **نبين أن للمعادلة** $f'(x_0)=-1$ **حل**

علما أن -1 هو ميل المستقيم (Δ)

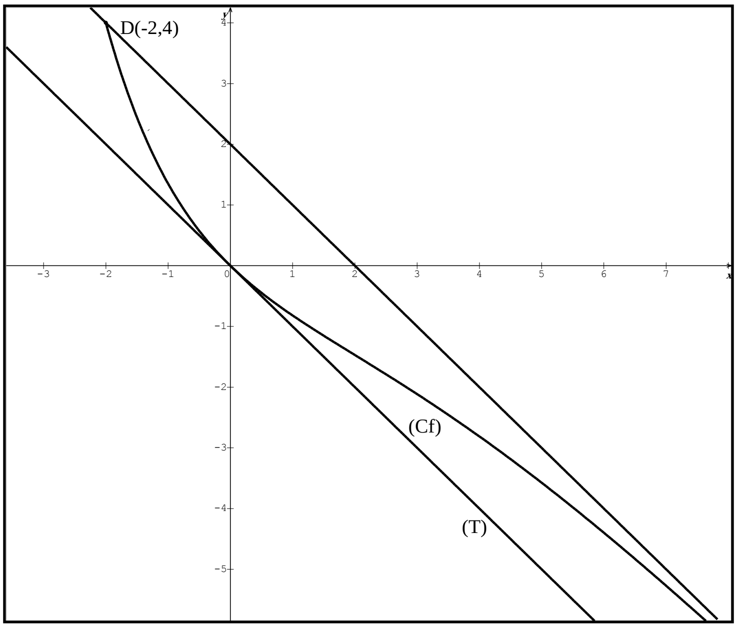
$$f'(x_0)=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}x_0e^{-\frac{x_0}{2}}-1=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}x_0e^{-\frac{x_0}{2}}=0 \Rightarrow x_0=0$$ لان $e^{-\frac{x_0}{2}} \neq 0$ **(و.هـم)**

7°) حساب $f(0)$: $f(0)=0$

***/ كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 : بصفة عامة** $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ **ومن أجل** $x_0=0$ **لدينا** $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ **وبما أن** $f(0)=0$ **و** $f'(0)=-1$ **فان معادلة المماس (T) هي:** $y=-x$

8°) حساب $f(-2)$: $f(-2)=4$

***/ إنشاء (Δ)، (T) و (C_f) على المجال** $]-2;+\infty[$



9°) المناقشة البيانية للمعادلة: $(m-2)e^{\frac{x}{2}}+x+2=0$

***/ أولا نغير شكل المعادلة بإظهار الدالة f :**

$$(m-2)e^{\frac{x}{2}}+x+2=0$$
$$\Rightarrow (m-2)e^{\frac{x}{2}}=-x-2$$
$$\Rightarrow (m-2)e^{\frac{x}{2}}.\underline{e^{-\frac{x}{2}}}=(-x-2).\underline{e^{-\frac{x}{2}}}$$
$$\Rightarrow m-2=(-x-2).e^{-\frac{x}{2}}$$
$$\Rightarrow m=(-x-2).e^{-\frac{x}{2}}+2$$
$$\Rightarrow \underline{-x}+m=\underbrace{(-x-2).e^{-\frac{x}{2}}\underline{-x}+2}_{f(x)}$$
$$\Rightarrow f(x)=-x+m$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المائل ذا المعادلة $y=-x+m$ **الموازي لكل من (T) و (Δ) لان لديهم نفس الميل وبالتالي نقارن m بـ 0 و 2**

***/ ثانيا: المناقشة البيانية**

- $m<0$ **لا يوجد حلول**
- $m=0$ **يوجد حل وحيد معدوم**
- $0<m<2$ **يوجد حلين مختلفين في الإشارة**
- $m=2$ **يوجد حل وحيد سالب**
- $m>2$ **لا يوجد حلول**

،،، بالتوفيق والنجاح ،،،

ملاحظة: لو أن الرسم كامل الحالة الأخيرة والتي قبلها تكتب مع بعض ويوجد حل وحيد سالب

،،، انتهى ،،،

،،، BAC 2016 ،،،