مختلف العلاقات الخاصة بالمكثفة :

يحتوي الموضوع على مختلف المعادلات التفاضلية الخاصة بالمكثفة و على براهين مختلفة لبعض العلاقات.

مختلف المعادلات التفاضلية الخاصة بالمكثفة :

أولا : **في حالة شحن المكثفة :**

1. المعادلة التفاضلية الخاصة ب U_C:

من قانون جمع التوترات نجد

$$U_R + U_C = E$$

$$R.i + U_C = E \Rightarrow R.C.\frac{dU_C}{dt} + U_C = E$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = \frac{E}{RC}}$$

2. المعادلة التفاضلية الخاصة بالشحنة q :

لدينا

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{و} \quad U_C = \frac{q}{C}$$

من قانون جمع التوترات نجد

$$U_R + U_C = E$$

$$R.i + U_C = E \Rightarrow R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

بالقسمة على R نجد :

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}.q = \frac{E}{R} = \frac{E.C}{RC} = \frac{Q_0}{RC}}$$

المعادلة التفاضلية الخاصة بالتوتر U_R :

لدينا $U_R + U_C = E \Rightarrow U_C = E - U_R$

بالاشتقاق نجد: $\frac{dU_C}{dt} = -\frac{dU_R}{dt}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية للتوتر U_C نجد : $-\frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{RC}(E - U_R) = \frac{E}{RC}$

$$-\frac{dU_R}{dt} + \frac{E}{RC} - \frac{U_R}{RC} = \frac{E}{RC}$$

ومنه نجد: $$\boxed{\frac{dU_R}{dt} + \frac{U_R}{RC} = 0}$$

حلول المعادلات السابقة:

1. **المعادلة التفاضلية الخاصة ب U_C:** لدينا : $\tau = R.C$

$$\boxed{U_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

2. **المعادلة التفاضلية الخاصة بالشحنة q :**

$$\boxed{q = Q_0.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E.C.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

3. **المعادلة التفاضلية الخاصة بالتوتر U_R :**

$$\boxed{U_R = E.e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

ثانيا : في حالة تفريغ المكثفة :

1. المعادلة التفاضلية الخاصة ب U_C:

من قانون جمع التوترات نجد $U_R + U_C = 0$

$$R.i + U_C = 0 \Rightarrow R.C.\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = 0}$$

2. المعادلة التفاضلية الخاصة بالشحنة q :

من قانون جمع التوترات نجد $U_R + U_C = 0$

$$R.i + U_C = 0 \Rightarrow R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

بالقسمة على R نجد :

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}.q = 0}$$

3. المعادلة التفاضلية الخاصة بالتوتر U_R :

لدينا $U_R + U_C = 0 \Rightarrow U_C = -U_R$

بالاشتقاق نجد: $\frac{dU_C}{dt} = -\frac{dU_R}{dt}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية للتوتر U_C نجد : $-\frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{RC}(-U_R) = 0$

و منه نجد: $\boxed{\frac{dU_R}{dt} + \frac{U_R}{RC} = 0}$

(ملاحظة : نفس المعادلة التفاضلية خلال الشحن)

حلول المعادلات السابقة:

1. **المعادلة التفاضلية الخاصة بـ U_C:** لدينا : $\tau = R.C$

$$U_C = E\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. **المعادلة التفاضلية الخاصة بالشحنة q :**

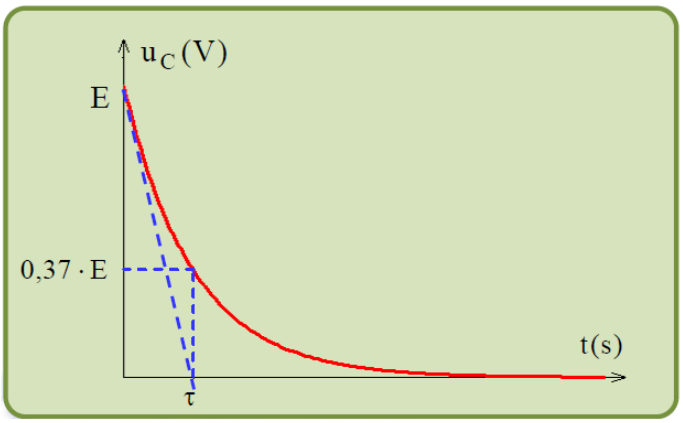
$$q = Q_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} = E.C\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1. **المعادلة التفاضلية الخاصة بالتوتر U_R :**

$$U_R = E\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

براهين مختلفة :

1. **في المنحنى $U_C = f(t)$ خلال التفريغ البرهان على أن المماس عند t=0 يقطع محور الأزمنة عند نقطة فاصلتها $t = \tau$:**



لدينا :

$$U_C = E\, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \quad \frac{dU_C}{dt} = -\frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

معادلة المماس هي : $y = at + b$

حيث: $a = U_C(0) = \boxed{E}$ و $b = \frac{dU_C}{dt}(0) = \boxed{-\frac{E}{\tau}}$

أي أن معادلة المماس هي: $y = -\frac{E}{\tau}t + E$

عند نقطة تقاطع المماس مع محور الأزمنة فإن : $y = 0$

$$-\frac{E}{\tau}t+E=0\Rightarrow-\frac{E}{\tau}t=-E\Rightarrow\frac{t}{\tau}=1$$ ومنه

$$\boxed{t=\tau}$$ ومنه

2. **في منحنى الطاقة $E_C=f(t)$ خلال التفريغ البرهان على أن المماس عند t=0 يقطع محور الأزمنة عند نقطة فاصلتها $t=\frac{\tau}{2}$:**

$$Ec=\frac{1}{2}CU_C{}^2=\frac{1}{2}CE^2e^{-\frac{2t}{\tau}}=E_0e^{-\frac{2t}{\tau}}$$ لدينا

$$\frac{dEc}{dt}=E_0.\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)=-\frac{E_0}{2\tau}e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

معادلة المماس هي : $y=at+b$

حيث: $a=E_C(0)=\boxed{E_0}$ و $b=\frac{dE_C}{dt}(0)=\boxed{-\frac{2E_0}{\tau}}$

أي أن معادلة المماس هي : $y=-\frac{2E_0}{\tau}t+E_0$

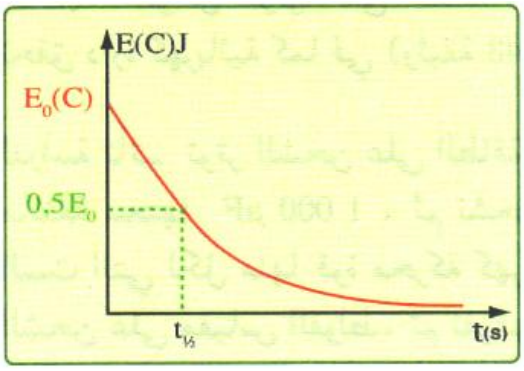
عند نقطة تقاطع المماس مع محور الأزمنة فإن : $y=0$

$$-\frac{2E_0}{\tau}t+E_0=0\Rightarrow-\frac{2E_0}{\tau}t=-E_0\Rightarrow\frac{2t}{\tau}=1\Rightarrow2t=\tau$$ ومنه:

$$\boxed{t=\frac{\tau}{2}}$$ ومنه

3. زمن تناقص طاقة مكثفة إلى النصف خلال التفريغ:

$$Ec=\frac{1}{2}CU_C{}^2=E_0e^{-\frac{2t}{\tau}}$$ لدينا:



عندما : $t = t_{1/2}$ فإن : $Ec = \frac{E_0}{2}$

بالتعويض نجد : $\frac{E_0}{2} = E_0 e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$

بإدخال اللوغاريتم إلى الطرفين نجد : $-\ln 2 = -\frac{2t_{1/2}}{\tau} \Rightarrow 2t_{1/2} = \tau.\ln 2$

و منه نجد :

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\tau}{2}.\ln 2}$$

بالتوفيق و النجاح **الأستاذ : خرخاش لخضر**