الحل النموذجي لاختبار البكالوريا التجريبيةدورة2013

المادة: الرياضيات — الموضوع الأول — إعداد الأستاذ: بالعبيدي م العربي

التمرين الأول: (4.5 نقط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2-2z+2=0$.

$z^2-2z+2=0$ تكافئ $z^2-2z+1=-1$

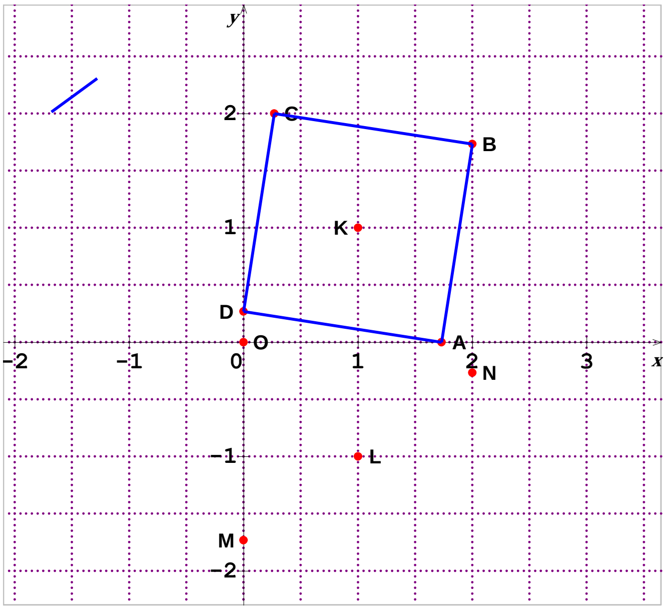
تكافئ $(z-1)^2=i^2$

تكافئ $z-1=i$ أو $z-1=-i$

تكافئ $\boxed{z=1+i \text{ أو } z=1-i}$

2) إنشاء النقط K ، L و M

لدينا: $z_K=1+i$ ؛ $z_L=1-i$ و $z_M=-i\sqrt{3}$.



3-أ) التحقق أن $z_N=2+i(\sqrt{3}-2)$

لدينا النقطة N نظيرة النقطة M بالنسبة للنقطة L

ومنه: $z_N=2z_L-z_M=2+i(\sqrt{3}-2)$

ب) تعيين اللاحقتين z_A و z_C

لدينا: r دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

وعليه العبارة المركبة لـ r هي: $z'=iz$

لدينا: $r(M)=A$ معناه $z_A=iz_M=\sqrt{3}$

$r(N)=C$ معناه $z_C=iz_N=(2-\sqrt{3})+2i$

ج) تعيين اللاحقتين z_D و z_B

لدينا: t انسحاب لاحقة شعاعه $2i$

وعليه العبارة المركبة لـ t هي: $z'=z+2i$

لدينا: $r(M)=D$ معناه $z_D=z_M+2i=(2-\sqrt{3})i$

$r(N)=B$ معناه $z_B=z_N+2i=2+\sqrt{3}i$

4-أ) تبيّان أن K هي منتصف كلا من $[DB]$ و $[AC]$

لدينا: $\frac{z_B+z_D}{2}=\frac{2+\sqrt{3}i+(2-\sqrt{3})i}{2}=1+i=z_K$

$\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})+2i}{2}=1+i=z_K$

ب) تبيّان أن: $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i$ واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

$$\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=\frac{(2-\sqrt{3})+2i-(1+i)}{2+\sqrt{3}i-(1+i)}=\frac{(1-\sqrt{3})+i}{1+(\sqrt{3}-1)i}$$

بعد ضرب حدّي الكسر في مرافق المقام نجد $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i$

$\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i$ معناه $\left|\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}\right|=|i|=1$ معناه $CK=BK$

$\arg\left(\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}\right)=\arg(i)$ معناه $(\overrightarrow{KC};\overrightarrow{KB})=\frac{\pi}{2}$

ومنه الرباعي $ABCD$ مربع لأن القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان ومتعامدان

التمرين الثاني (4نقط)

I-1) البرهن بالتراجع أنه $0\prec u_n\prec 1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

*التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $0\prec u_0\prec 1$ محققة لأن $u_0=\frac{1}{3}$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحّة $P(n+1)$

لدينا: $0\prec u_n\prec 1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

ومنه: $0\prec 2u_n\prec 2$ ومنه $1\prec 1+2u_n\prec 3$

ومنه $\frac{1}{3}\prec\frac{1}{1+2u_n}\prec 1$ ومنه $-1\prec-\frac{1}{1+2u_n}\prec-\frac{1}{3}$

ومنه $\frac{2}{3}\prec 1-\frac{1}{1+2u_n}\prec 0$ ومنه $0\prec\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{1+2u_n}\right)\prec 1$

وعليه $0\prec u_{n+1}\prec 1$ ومنه الخاصية $0\prec u_n\prec 1$ صحيحة

2-أ) التحقق أنّ: $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}-\frac{2}{3}u_n\right]$$
$$=\frac{3}{2}\left[\frac{3(1+2u_n)-3-2u_n(1+2u_n)}{3(1+2u_n)}\right]$$
$$=\frac{3}{2}\left[\frac{4u_n(1-2u_n)}{3(1+2u_n)}\right]$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $0\prec u_n\prec 1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}\succ 0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

وعليه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب)تبيان ان المتتالية (u_n) متقاربة وحساب نهايتها

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأعلى ومتزايدة

لحساب النهاية نضع : $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\alpha$

لدينا: $u_{n+1}=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]$ ومنه: $\alpha=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2\alpha}\right]$

بعد حل هذه المعادلة نجد: $\alpha=1$ أو $\alpha=0$ مرفوض

II-أ)تبيان ان (v_n) م.هـ وتعيين أساسها وحدها الأول

(v_n) م.هندسية معناه $v_{n+1}=q.v_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

لدينا $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}}=\frac{\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]-1}{2\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n-1}{2u_n}\right)$

ومنه: $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ أي (v_n) م.هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{2u_0}=-1$

ب)كتابة v_n بدلالة n و استنتاج u_n بدلالة n

ثم حساب من جديد نهاية المتتالية (u_n).

لدينا: $v_n=v_0.q^n=(-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا: $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n}$ ومنه: $u_n=\frac{1}{1-2v_n}=\frac{1}{1+2\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-2v_n}=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

جـ) احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n

لدينا: $S_n=v_0+v_1+......+v_n$

ومنه: $S_n=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=(-1)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right]=\frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right)$

لدينا: $T_n=v_0+3v_1+9v_2+......+3^n v_n$

ومنه: $T_n=v_0+3v_0.q+9v_0q^2+......+3^n q_n$

أي: $T_n=v_0(1+3.q+9q^2+......+3^n q_n)=v_0(n+1)$

إذن: $T_n=(-1)(n+1)$.

التمرين الثالث (4,5نقط)

1) تبيّان أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له.

(P) و (P') متقاطعان لأن $\vec{n_p}$ لا يوازي $\vec{n_{p'}}$

لإثبات أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له يكفي اثبات أن :

$B\in(P)$ و $B\in(P')$ وأن $\vec{u}\perp\vec{n_p}$ و $\vec{u}\perp\vec{n_{p'}}$

$B(3;1;2)\in(P)$ معناه $3(3)+2(1)-5(5)-1=0$

$B(3;1;2)\in(P')$ معناه $3+1-2(2)=0$

$\vec{u}\perp\vec{n_p}$ معناه $\vec{u}(1;1;1).\vec{n_p}(3;2;-5)=1(3)+1(2)+1(-5)=0$

$\vec{u}\perp\vec{n_{p'}}$ معناه $\vec{u}(1;1;1).\vec{n_{p'}}(1;1;-2)=1(1)+1(1)+1(-2)=0$

2)أثبات أن B هي المسقط العمودي لـA على (P).

B هي المسقط العمودي لـA على (P) معناه $\vec{AB}//\vec{n_p}$

$\vec{AB}//\vec{n_p}$ لأن $\vec{AB}=3\vec{n_p}$ أي $\vec{AB}$ و $\vec{n_p}$ مرتبطان خطيا

3- أ)تبيّان أن المستويان (P) و (Q) متوازيان.

$(P)//(Q)$ معناه $\vec{u_{1Q}}\perp\vec{n_p}$ و $\vec{u_{2Q}}\perp\vec{n_p}$

حيث : $\vec{u_{1Q}}(2;2;2)$ و $\vec{u_{2Q}}(-2;3;0)$ شعاعا توجيه (Q)

$\vec{u_{1Q}}\perp\vec{n_p}$ معناه $\vec{u_{1Q}}(2;2;2).\vec{n_p}(3;2;-5)=2.3+2.2+2.(-5)=0$

$\vec{u_{2Q}}\perp\vec{n_p}$ معناه $\vec{u_{2Q}}(2;-3;0).\vec{n_p}(3;2;-5)=2.3-3.2+0.-5=0$

ب)التحقق أن $3x+2y-5z=58$ هي معادلة (Q).

$(P)//(Q)$ معناه $\vec{n_p}(3;2;-5)$ شعاع ناظم له ويشمل النقطة التي احداثياها $\omega(6;5;-6)$ نحصل عليها من أجل $t=0$ و $\lambda=0$ مثلا

وعليه (Q) له معادلة من الشكل: $3x+2y-5z=d$

بعد تعويض ω في المعادلة نجد احداثياها $d=58$

أي (Q) له معادلة ديكارتية من الشكل $3x+2y-5z=58$

جـ)التحقق أنّ النقطة I تنتمي للمستوي (Q) ثم استنتاج أن المستوي (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[BA]$.

لدينا: I منتصف القطعة $[BA]$ معناه $I(\frac{15}{2};4;-\frac{11}{2})$

$I\in(Q)$ لأن: $3(\frac{15}{2})+2(4)-5(-\frac{11}{2})=58$

(Q) مستوي محوري للقطعة $[BA]$ لأن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظم له ويشمل النقطة I .

4أ)تبيّان أن (S) سطح كرة يطلب تحديد عناصرها المميزة

(S) هي مجموعة النقط M من القضاءحيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ معناه $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}=0$

أي M تنتمي لسطح الكرة التي قطرها $[BA]$

العناصرالمميزة هي :

المركزالنقطة I ونصف القطر النقطة $R=IA=\frac{3\sqrt{38}}{2}$

ب)استنتج ان المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة مركزها I ونصف قطرها. R لأن $I\in(Q)$

التمرين الرابع (07نقط)

I-أ)حساب $g(2)$ أتمام النهايات المنقوصة .

$g(2)=e^{-2}+2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-x})+2=\lim\limits_{t\to-\infty}(-te^{t})+2=2$

ب)تعليل وجود عدد حقيقي وحيد α بحيث:

يحقق: $-0,38\prec\alpha\prec-0,36$: $g(\alpha)=0$

الدالة g متزايدة ومستمرة على المجال $]-1;2[$

لدينا: $g(-0,38)=-0.018$ و $g(-0,36)=0.05$

أي $g(-0,38)\times g(-0,36)\prec 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث:

يحقق: $-0,38\prec\alpha\prec-0,36$: $g(\alpha)=0$.

جـ)استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$.

نستنتج مما سبق ان اشارة $g(x)$ تكون كما يلي.

$x\in]-\infty;\alpha[$ معناه $g(x)\in]-\infty;0[$ أي $g(x)\prec 0$

$x\in]\alpha;+\infty[$ معناه $g(x)\in]0;2[$ أي $g(x)\succ 0$

II-1)تبيّان أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ح.ع.ت $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1-xe^{-x})$

بوضع : $t=-x$ نجد: $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}t(-2+e^{t})+1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1-xe^{-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$

2) أ- تبيّان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

$f'(x)=2+(-1)e^{-x}-e^{-x}(-x)=(x-1)e^{-x}+2=g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيراتها.

بمأن $f'(x)=g(x)$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	|	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

2)ب-تبيّان أن: $f(\alpha)=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$ **وحصرا لـ** $f(\alpha)$

لدينا: $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}$

ولدينا $g(\alpha)=0$ معناه $(\alpha-1)e^{-\alpha}+2=0$

معناه $e^{-\alpha}=\frac{2}{1-\alpha}$

ومنه: $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}=2\alpha+1+\frac{2\alpha-2+2}{\alpha-1}$

$=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$

الحصر: لدينا $-0,38\prec\alpha\prec-0,36.....(1)$

(1) تكافئ $-0,76\prec 2\alpha\prec-0,72.....(1)$

تكافئ $2,24\prec 2\alpha+3\prec 2,28.....(2)$

(1)تكافئ $-1,38\prec\alpha-1\prec-1,36.....(1)$

تكافئ $\frac{2}{-1,36}\prec\frac{2}{\alpha-1}\prec\frac{2}{-1,38}.....(3)$

من (2) و (3) نجد

$2,24-\frac{2}{1,36}\prec f(\alpha)\prec 2,28-\frac{2}{1,38}$

وأخيرا $0,78\prec f(\alpha)\prec 0,84$

3) تبيّان (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيتّها.

(C_f) يقبل نقطة إنعطاف معناه " f تنعدم وتغيراشارتها

لدينا: $f'(x)=g(x)$ ومنه $f''(x)=g'(x)=(2-x)e^{-x}$

من حدول تغيرات g المعطى g' تنعدم عند 2 وتغيراشارتها

ومنه (C_f) يقبل نقطة إنعطاف إحداثياها $(2;5-2e^{-2})$

4-أ-تبيّان أن (C_f) يقبل مقاربا مائلا $(d): y=2x+1$

(d) مقاربا مائلا لـ (C_f) معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-y=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-y=\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=\lim\limits_{u\to-\infty}(ue^{u})=0$

ومنه (C_f) يقبل المستقيم (d) كمقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) بالتسبة لـ (d).

ندرس أشارة الفرق $f(x)-y=(-xe^{-x})$

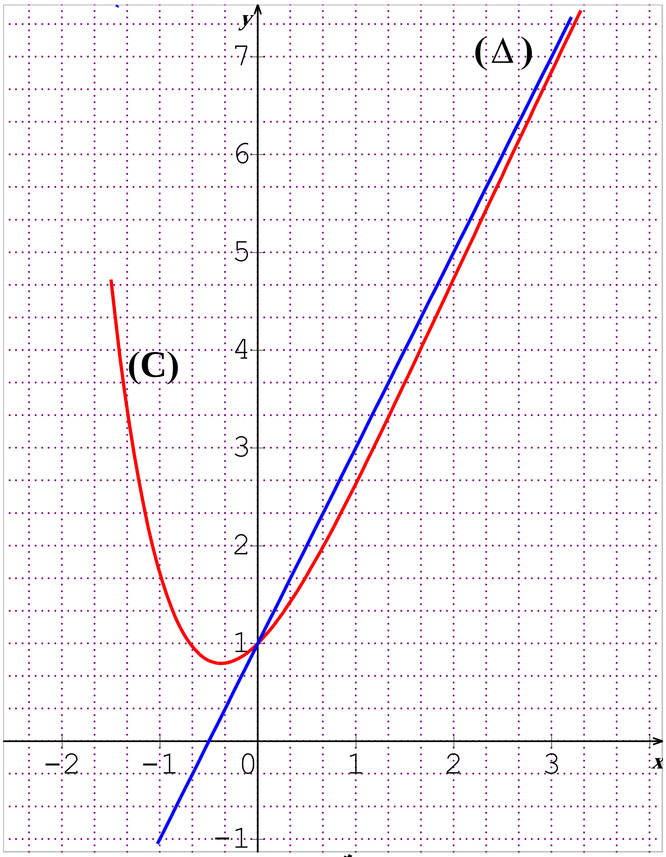
$f(x)-y=0$ معناه $-xe^{-x}=0$ ومنه $x=0$

$f(x)-y\succ 0$ معناه $-xe^{-x}\succ 0$ ومنه $x\prec 0$

$f(x)-y\prec 0$ معناه $-xe^{-x}\prec 0$ ومنه $x\succ 0$

نستنتج أن (C_f) يكون تحت (d).

جـ-أنشاء (C_f) على المجال $[-1,5;+\infty[$



5)استنتاج اتجاه تغير الدالة h وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $h(x)=f(x^2.e^x)$

الدالة h مركبة من الدالة $x\mapsto x^2e^x$ متبوعة بالدالة f

وعليه: $h'(x)=(x^2.e^x)'f'(x^2.e^x)$

$$=(x^2.e^x)'g(x^2.e^x)=((x^2+2x)e^x)g(x^2.e^x)$$

ومنه إشارة $h'(x)$ هي حسب إشارة $(x^2+2x).g(x)$

لكن إشارة $g(x)\succ 0$ لأن $g(\alpha)\succ 0$

ومنه إشارة $h'(x)$ هي حسب الدول التالي:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
(x^2+2x)	+	-	+	
$g(x)$	+	+	+	
$h'(x)$	+	-	+	

بعد حساب نهايات الدالة h عند $-\infty$ و $+\infty$ وحساب $h(-2)$ ، $h(0)$ يكون جدول تغيرات الدالة h كمايلي

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$	1	↗	$h(-2)$	↘	1	↗	$+\infty$

6) أ-تعيّن العددين الحقيقين a و b

k دالة أصلية للدالة $x\mapsto -xe^{-x}$ و $k(x)=(ax+b)e^{-x}$

$k'(x)=(a)e^{-x}-(ax+b)e^{-x}$

ومنه :

$=(-ax+a-b)e^{-x}=-xe^{-x}$

بالمطابقة نجد: $a=1$ و $a-b=0$

ومنه : $a=1$: و $b=1$

وعليه تكون عبارة $k(x)=(x+1)e^{-x}$

ب- استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ و التكن F دالة أصلية لها

ومنه: $F(x)=x^2+x+h(x)+c$ حيث c ثابت حقيقي

ومنه: $F(x)=x^2+x+(x+1)e^{-x}+c$

****

أسرة الرياضيات تتمنى

لجميع التلاميذ النجاح في شهادة

البكالوريا دورة جوان 2013

****

مبروك النجاح

لجميع التلاميذ

مع تمنياتي دراسة

موفقة في الجامعة

أن شاء الله

****

من أنجاز الأستاذ:بالعبيدي محمد العربي