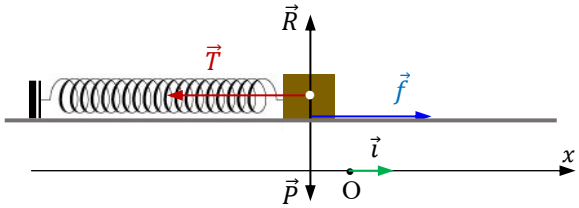
ما يجب أن أعرفه حتى أقول: إني استوعبت هذا الدرس

1 - يجب أن أعرف أن ليس كل حركة ذهاب وإياب هي حركة اهتزازية، بل يجب أن تحدث حول وضع توازن.
2 - يجب أن أعرف كيفية إيجاد المعادلة التفاضلية لحركة نواس مروني بالطريقتين الحركية والطاقوية.
3 - يجب أن أعرف كيفية إيجاد المعادلة التفاضلية لحركة نواس بسيط بالطريقة الطاقوية.
4 - يجب أن أعرف معاني المفردات التالية:
- اهتزازات حرّة
- اهتزازات حرّة متخامدة
- اهتزازات حرّة غير متخامدة
- اهتزازات مغذاة
5 - يجب أن أُحسن استعمال البيانات في هذا الدرس. (طلب غريب، لكن ستعرف أنه ليس غريبا)

ملخّص الدرس

1 - النواس المروني الأفقي:



المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{h}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$

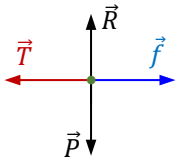
حيث: h : معامل الاحتكاك المائع، k : ثابت مرونة النابض

بإهمال الاحتكاك يكون: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$

الدور الذاتي: $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

التواتر الذاتي: $N_0=\frac{1}{T_0}$

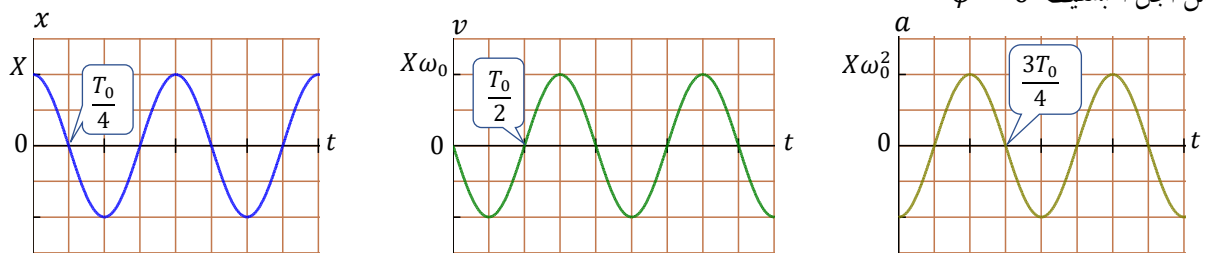
النبض الذاتي: $\omega_0=2\pi N_0$



$$x=X\cos(\omega_0 t+\varphi)$$
$$v=\frac{dx}{dt}=-X\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$$
$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-X\omega^2{}_0\cos(\omega_0 t+\varphi)=-\omega_0^2 x$$

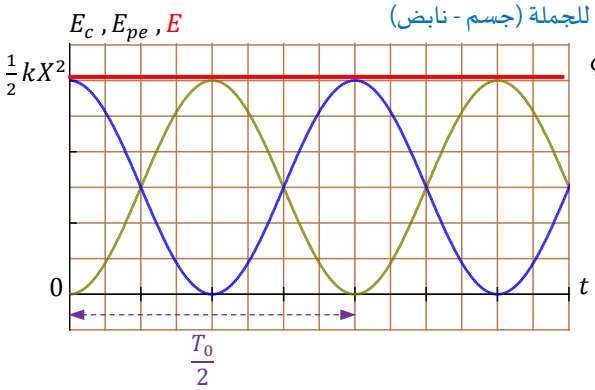
تمثيل المطال والسرعة والتسارع:

نأخذ من أجل التبسيط $\varphi=0$



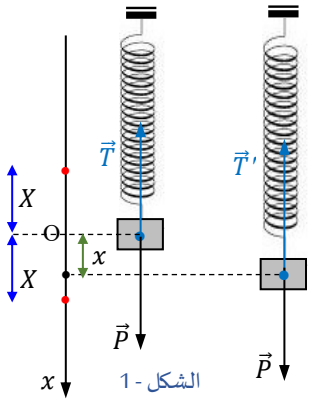
الطاقة الكلية للجملة (جسم - نابض)

نأخذ $\varphi=0$

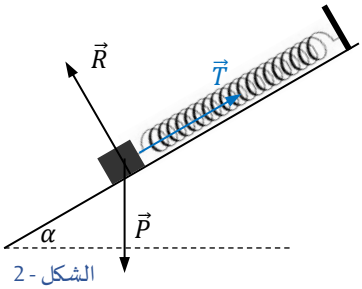


$$E_c=\frac{1}{2}mX^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$$
$$E_{pe}=\frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$$
$$E=E_{pe}+E_c=\frac{1}{2}kX^2$$

2 - النواس المروني الشاقولي والمائل: (الاحتكاك وتأثيرات الهواء كلها مهملة)



الشكل - 1



الشكل - 2

في وضع التوازن:

الشكل - 1: $P = T = k\,\Delta l$، حيث Δl استطالة النابض عند التوازن.

الشكل - 2: $P\sin\alpha = T = k\,\Delta l$

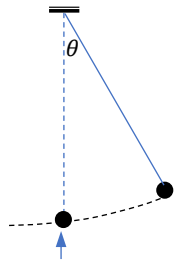
المعادلة التفاضلية في كل شكل هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

سواء كان النابض أفقيا أو شاقوليا أو مائلا فإن:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

3 - النواس الثقلي البسيط:



وضع التوازن

تأثير الهواء مهمل.

المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ ، ومن أجل السعات الصغيرة: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$

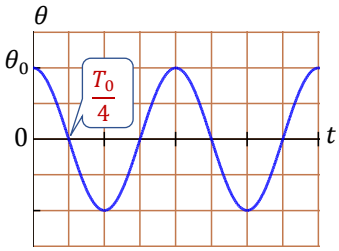
النبض الذاتي: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ، الدور الذاتي: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

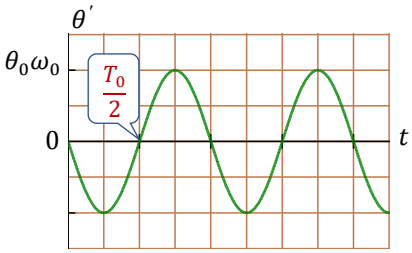
تمثيل المطال الزاوي والسرعة الزاوية والتسارع الزاوي

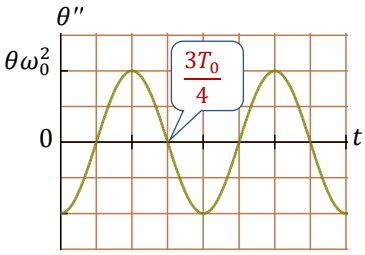
$$\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = -\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta'' = -\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega^2{}_0\theta$$

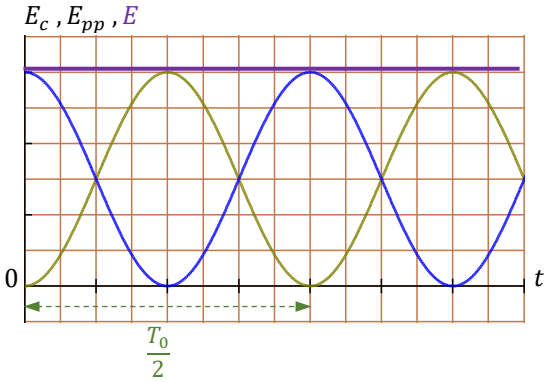






الطاقة الكلية للجملة (نواس – أرض)

نأخذ $\varphi = 0$



الدرس

1 - الحركة الاهتزازية الميكانيكية

هي كل حركة ذهاب وإياب لجملة حول وضع توازن هذه الجملة. حركة الطفلة صعودا ونزولا ليست اهتزازية (الشكل - 1)، لأنها لا تملك وضع توازن. المعادلة الزمنية لحركة هزّاز من الشكل:

$x = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$ (الشكل - 2)

AB : طول المسار

x : المطال

X : المطال الأعظمي (السّعة) دائما موجب

$OG_1 = |OG_2| = X$

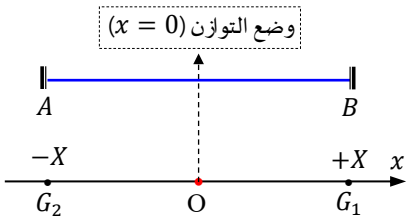
ω_0 : النبض الذاتي (سميناه ذاتيا لأنه لم يتحكم فيه هزاز آخر)

$\omega_0 t + \varphi$: صفحة الحركة

φ : الصفحة الابتدائية (الصفحة من أجل $t = 0$)

صورة من $fr.123f.com$

الشكل - 1

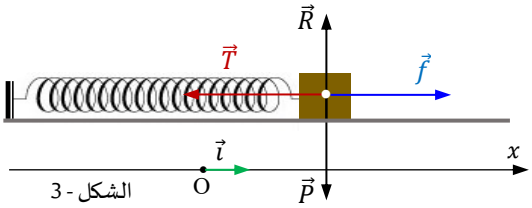


الشكل - 2

1 - 1 - حركة النواس المروني:

النواس المروني الأفقي: (الشكل - 3)

(تُجرى التجربة فوق طاولة هوائية للتخلّص من الاحتكاك الصلب)



الشكل - 3

حالة الاحتكاك المائع (الاحتكاك مع الغازات أو السوائل):

قوة الاحتكاك: معاكسة دائما لشعاع السرعة وتتناسب معها. $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\frac{dx}{dt}\vec{i}$ ، حيث h معامل الاحتكاك مع الهواء في هذه الحالة.

قوّة الإرجاع التي يؤثر بها النابض:

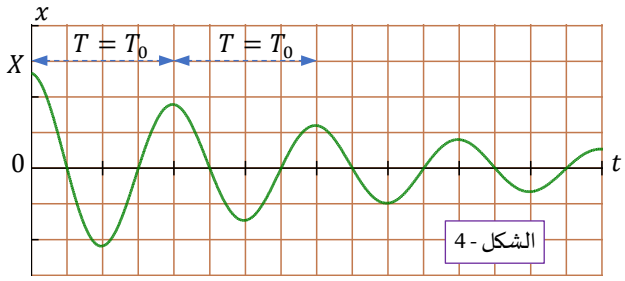
- حاملها محور النابض
- تكون جهتها حيث دائما تحاول إرجاع الجسم نحو وضع التوازن $\vec{T} = -k\,x\vec{i}$
- شدّتها $T = k|x|$ ، حيث x هي فاصلة مركز عطالة الجسم، k ثابت مرونة النابض.

قوة الثقل $\vec{P}$ وقوة تأثير الطاولة $\vec{R}$ تتكافآن بحيث $\vec{P} + \vec{R} = 0$

حسب القانون الثاني لنيوتن: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} = m\,\vec{a}$ ، وبالتعويض نكتب: $-kx\,\vec{i} - h\frac{dx}{dt}\vec{i} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$ ، وباختصار $\vec{i}$ من الطرفين نجد: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ (1)

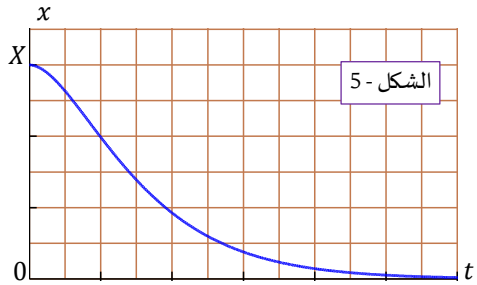
هذه المعادلة التفاضلية حلها خارج المقرّر.

- إذا كانت قوة الاحتكاك ضعيفة تكون الاهتزازات حرّة متخامدة شبه دورية. السعة تتناقص بمرور الزمن وشبه الدور $T \approx T_0$ (الشكل - 4).



الشكل - 4

- إذا كانت قوة الاحتكاك معتبرة تكون الاهتزازات لا دورية، فبمجرّد أن تظهر الاهتزازات تتخامد ويتوقف الجسم عن الحركة. (الشكل - 5)



الشكل - 5

- بإهمال الاحتكاك تكون الاهتزازات حرّة غير متخامدة.

نتحصل على المعادلة التفاضلية بوضع $h = 0$ في المعادلة (1)، أي:

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ (2)

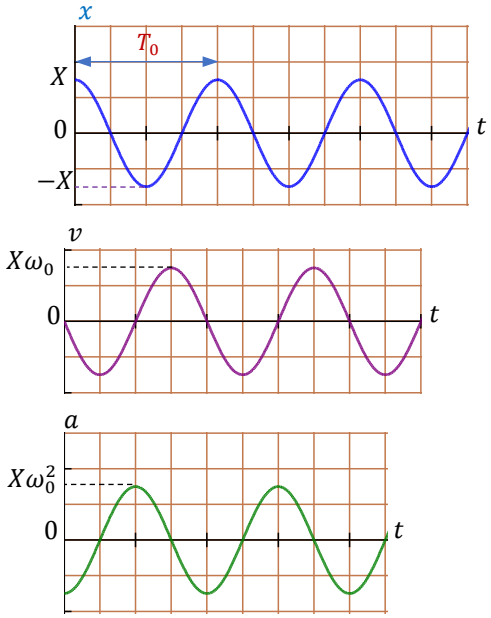
حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل: $x = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$

باشتقاق عبارة المطال بالنسبة للزمن مرة ثم مرة أخرى نتحصل على التسارع $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0{}^2 X\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0{}^2 x$.

بمطابقة هذه العلاقة مع العلاقة (2) نجد $\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$ ، والدور الذاتي $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

تمثيل $x(t)$ ، $v(t)$ ، $a(t)$

للتبسيط نأخذ $\varphi = 0$ ، ونكتب المعادلات الزمنية: $x = X\cos\frac{2\pi}{T_0}t$ ، $v = -X\omega_0 \sin\frac{2\pi}{T_0}t$ ، $a = -X\omega_0^2 \cos\frac{2\pi}{T_0}t$



t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	X	0	$-X$	0	X

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	0	$-X\omega_0$	0	$X\omega_0$	0

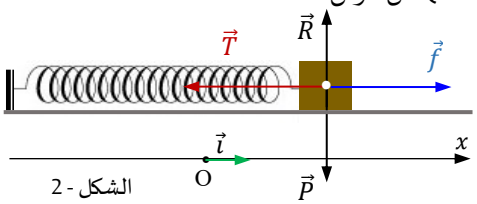
t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$-X\omega_0^2$	0	$X\omega_0^2$	0	$-X\omega_0^2$

حالة الاحتكاك الصلب (الاحتكاك مع السطوح): في هذه الحالة تكون قوة الاحتكاك ثابتة مهما كان الزمن.

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\,\vec{a}$ ، وعلى المحور Ox: $-kx\,\vec{\imath} + f\,\vec{\imath} = ma\vec{\imath}$

$$-kx + f = ma$$

المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x - \frac{f}{m} = 0$



الشكل - 2

الطاقة الكلية للجملة (نابض - جسم):

نعتبر الوضع المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية المستوي الأفقي الذي يتحرك فوقه الجسم، ونهمل الاحتكاك بنوعيه.

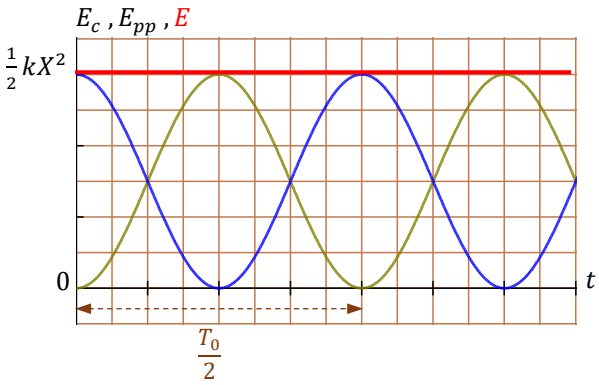
$$E = E_C + E_{Pe} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

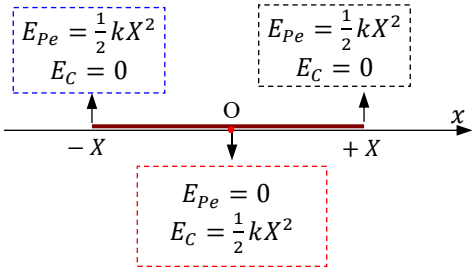
$$E = \frac{1}{2}mX^2\omega_0{}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

ولدينا $\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$ ، وبالتالي: $E = \frac{1}{2}mX^2\frac{k}{m}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$ ، $E = \frac{1}{2}kX^2$

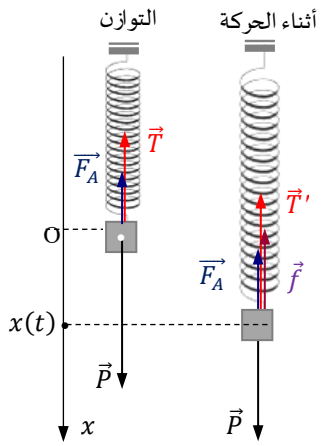
بيانات الطاقة:

نلاحظ أنه كلما كانت الطاقة الحركية معدومة تكون الطاقة الكامنة عظمى والعكس كذلك.





النواس المروني الشاقولي: (خاص بشعبتي الرياضيات)



يكون عند التوازن $(x=0)$: $mg = T + F_A = k\,\Delta l + F_A$ ، حيث $\vec{F_A}$ هي دافعة أرخميدس.

نطبق القانون الثاني لنيوتن عند اللحظة t : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{T} + \vec{F_A} = m\,\vec{a}$ ($\vec{f}$ قوّة الاحتكاك المائع)

على المحور Ox : $P\vec{\imath} - hv\,\vec{\imath} - T\,\vec{\imath} - F_A\vec{\imath} = ma\,\vec{\imath}$

$$mg - hv - k(\Delta l + x) - F_A = m\,a$$

$mg - hv - k\Delta l - kx - F_A = m\,a$ ، ولدينا عند التوازن $mg = k\,\Delta l + F_A$

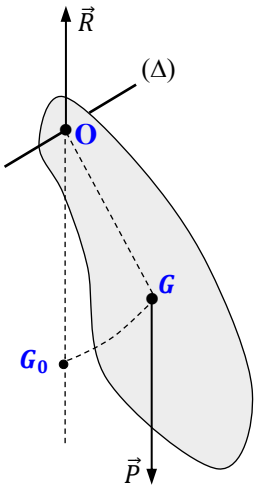
وبالتالي: $k\,\Delta l + F_A - hv - k\Delta l - kx - F_A = m\,a$ ، ومنه المعادلة التفاضلية:

$\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ ، وإذا أهملنا الاحتكاك : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

1 - 2 - حركة النواس الثقلي:

تعريف: النواس الثقلي هو كل جسم قابل للدوران حول محور لا يمر من مركز ثقله.

المسافة بين محور الدوران ومركز ثقل النواس هي $a = OG$



نواس ثقلي مركب

وضع التوازن المستقر للنواس الثقلي:

يكون النواس في وضع توازنه المستقر عندما يكون مركز ثقله على الشاقول المار من O وأسفله.

النواس الثقلي البسيط:

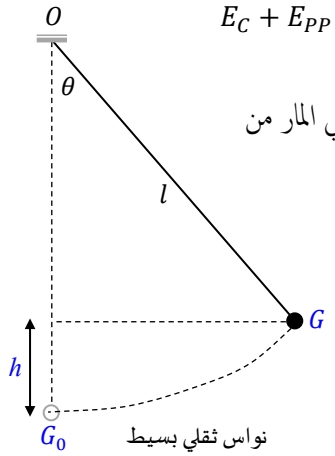
إذا ربطنا جسما بواسطة خيط معلّق أو سلك وكانت أبعاد الجسم مهملة أمام طول الخيط، وكتلة الخيط أو السلك مهملة نكون قد شكّلنا نواسا ثقليا بسيطا.

النواس الثقلي هو النواس الذي يهتز بفعل ثقله، وهو إما نواس ثقلي مركب أو نواس ثقلي بسيط.

نقتصر في دراستنا على النواس الثقلي البسيط.

من أجل نواس بسيط يكون $OG \approx l$

المعادلة التفاضلية:



نواس ثقلي بسيط

نحرف الخيط ابتداء من وضع توازن النواس (G_0) بزاوية θ_0 ونتركه بدون سرعة.

نطبق مبدأ إنحفاظ الطاقة للجملة (نواس - أرض) عندما يصبح الخيط صانعا مع الشاقول الزاوية θ. $E_C + E_{PP} = E$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh + E_{pp0} = E$$

E_{pp0} هي قيمة للطاقة الكامنة الثقالية تتعلق بالوضع المرجعي، فإذا كان الوضع المرجعي هو المستوي الأفقي المار من المستوي الأفقي المار من G_0 تكون $E_{pp0} = 0$.

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 l^2 + mg(l - l\cos\theta) + E_{pp0} = E \qquad (3)$$

مع العلم أن السرعة الخطية (v) تساوي السرعة الزاوية $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ × نصف القطر (l).

باشتقاق طرفي العلاقة (3) بالنسبة للزمن:

$2 \times \frac{1}{2}m\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \times l^2\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + mgl\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 0$ ، ومنه $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ (4)

إذا كانت الزاوية θ_0 صغيرة تكون كذلك θ ، وفي هذه الحالة يكون $\sin\theta \approx \theta$ ، حيث θ بالراديان (rad).

تصبح المعادلة التفاضلية (4) بالشكل : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$ (5)

وهي معادلة تفاضلية حلها من الشكل : $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ (6)

θ : الفاصلة الزاوية (المطال الزاوي) ، θ_0 : السعة الزاوية (المطال الزاوي الأعظمي)

ω_0 : النبض الذاتي ، $\omega_0 t + \varphi$: الصفحة ، φ : الصفحة الابتدائية

باشتقاق المعادلة الزمنية (6) مرّتين بالنسبة للزمن نجد : $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0{}^2\theta$ ، أي $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0{}^2\theta = 0$ (7)

بمطابقة العلاقتين (5) و (7) نجد $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ، $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

تصحيح الدور: لاحظ في هذا الجدول أنه كلما كانت الزاوية صغيرة يكون $\sin\theta \approx \theta$ ، فمن أجل $\theta = 10°$ تكون الدقة في المساواة تقترب من $\frac{1}{1000}$ ، أي أن الرقم الثالث بعد الفاصلة في كل من θ و $\sin\theta$ هو نفسه تقريبا.

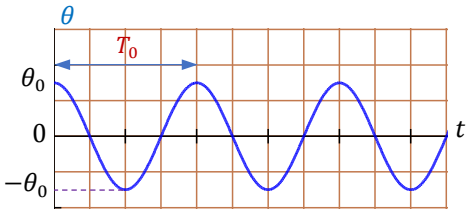
إذن يمكن اعتبار من الآن $\sin\theta = \theta$ إذا كانت $\theta < 10°$.

$\theta(°)$	3	7	9	10	16	22
$\theta(rad)$	0,0523	0,1218	0,1570	0,1744	0,2791	0,3837
$\sin\theta$	0,0523	0,1218	0,1564	0,1736	0,2756	0,3746

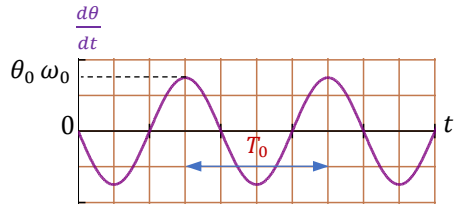
إذا كانت السعة معتبرة (حوالي $22°$) نصحّح الدور بالعلاقة $T = T_0\left(1 + \frac{\theta_0{}^2}{16}\right)$ ، حيث T_0 هو الدور من أجل السعات الصغيرة، أي $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ و θ_0 هي السعة المعتبرة مقاسة بـ (rad).

تمثيل الفاصلة الزاوية: $\theta = \theta_0 \cos\frac{2\pi}{T_0}t$ ، والسرعة الزاوية: $\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0\omega_0 \sin\frac{2\pi}{T_0}t$ ، والتسارع الزاوي: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\theta$

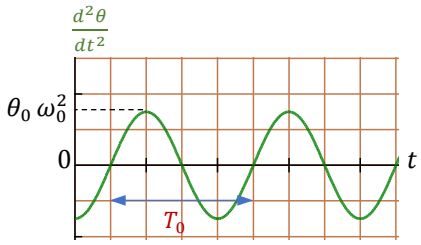
أخذنا للتبسيط الصفحة الابتدائية $\varphi = 0$



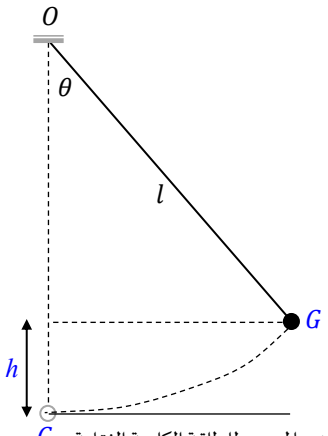
t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
θ	θ_0	0	$-\theta_0$	0	θ_0



t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\frac{d\theta}{dt}$	0	$-\theta_0\,\omega_0$	0	$\theta_0\,\omega_0$	0



t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\frac{d^2\theta}{dt^2}$	$-\theta_0\,\omega_0^2$	0	$\theta_0\,\omega_0^2$	0	$-\theta_0\,\omega_0^2$



الوضع المرجعي للطاقة الكامنة الثقلية

الطاقة الكلية للجملة (نواس - أرض):

نهمل تأثير الهواء.

$E = E_C + E_{PP}$ ، نعتبر الوضع المرجعي للطاقة الكامنة الثقالية المستوي الأفقي المار من مركز عطالة الجسم عند وضع التوازن.

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2\theta_0{}^2\omega_0{}^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{PP} = mgh = mgl(1 - \cos\theta)$$

من أجل زاوية θ صغيرة لدينا $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ ، وبالتالي تصبح $E_{PP} = \frac{1}{2}mgl\theta^2$

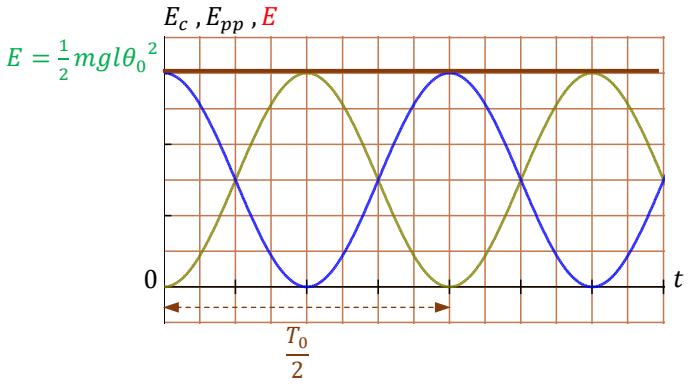
ولما نعوّض عبارة $\theta(t)$ نجد $E_{PP} = \frac{1}{2}mgl\theta_0{}^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

الطاقة الكلية هي : $E = \frac{1}{2}ml^2\theta_0{}^2\omega_0{}^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}mgl\theta_0{}^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

لدينا $\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}$ ، ومنه : $E = \frac{1}{2}ml^2\theta_0{}^2 \frac{g}{l} sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}mgl\theta_0{}^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$E = \frac{1}{2}mgl\theta_0{}^2[sin^2(\omega_0 t + \varphi) + cos^2(\omega_0 t + \varphi)]$ $\qquad$ $E = \frac{1}{2}mgl\theta_0{}^2$

مخطط الطاقة: نعتبر $\varphi = 0$



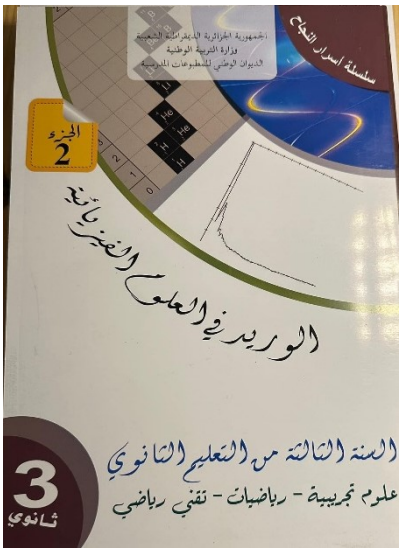
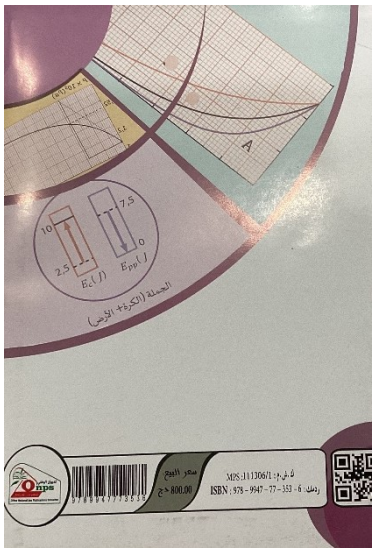
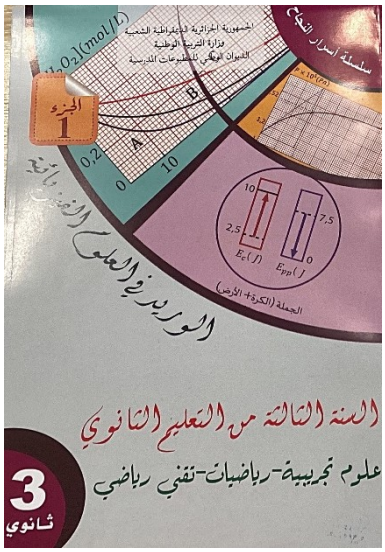
2 - تغذية الإهتزازات:

يمكن بواسطة عامل خارجي تعويض الطاقة الضائعة بفعل الاحتكاك في نواس مروني، وبدون التأثير على السعة والدور، فتصبح بذلك إهتزازات النواس غير متخامدة.

ملاحظة:

شعبة العلوم التجريبية غير معنية بالنواس المروني الشاقولي وحالة وجود الإحتكاك في النواس المروني الأفقي .

Guezouri Abdelkader, ancien élève de l'école normale supérieure.
Site: www.guezouri.org
Chaine Youtube : www.guezouri.org → Physianet Guezouri
Tél: 07 73 34 31 76
FB : Abdelkader Guezouri ... https://www.facebook.com/Aek.guezouri
Page FB: Guezouri_Physique
Blog FB: Akhbar El-lil

كتاب الوريد للأستاذ قزوري في جزأين... أطلبه من ديوان المطبوعات المدرسية لولايتك، حيث تجد هنا نقط البيع *www.onps.dz*

... خذْ الوريد، فلا تحتاج إلى مزيد للمزيد، إنّه الوحيد الفريد، فإذا كنتَ تائها فاليوم بصرك حديد، وعن الشعوذة بعيد...