

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقط)

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

(1) الإجابة خاطئة لأن:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{-3}{-5} \text{ أي } \overrightarrow{AB}(-1; -5; 5) \text{ لا يوازي } \overrightarrow{AC}(1; -3; -1)$$

(2) الإجابة صحيحة لأن: الثلاثية أحداثيات النقط C, B, A تحقق صحة المعادلة $25x - 6y - z - 33 = 0$

$$\text{لدينا: } A \in (ABD) \text{ أي } 25(2) - 6(3) - (-1) - 33 = 0$$

$$B \in (ABD) \text{ أي } 25(1) - 6(-2) - (4) - 33 = 0$$

$$D \in (ABD) \text{ أي } 25(1) - 6(-1) - (-2) - 33 = 0$$

(3) الإجابة خاطئة لأن: الشعاع $\overrightarrow{CD}(-2; -1; 0)$ لا يوازي

$$\text{الشعاع الناظم } \overrightarrow{n_\pi}(2; -1; 2) \text{ أي: } \frac{2}{-2} \neq \frac{-1}{-1}$$

$$(4) \text{ الإجابة خاطئة لأن: } HB = \sqrt{34} \neq d(B; (\pi)) = \frac{17}{3}$$

التمرين الثاني (04 نقط)

(1) حل المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$ في المجموعة Cلحل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر: $\Delta' = b'^2 - ac$

$$\text{لدينا: } \Delta' = (\sqrt{3}i)^2 = (-)^2 - (1)(4) = -3$$

ومنه حلّي المعادلة (e) هما:

$$z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1}, \quad z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1}$$

(2- أ) كتابة العددين z_2 و z_1 على الشكل الأسّي

$$\text{لدينا: } |Z| = \frac{1}{2} \text{ و } \arg(Z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ أي: } Z = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ومنه: } Z^3 = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \frac{1}{2^3} e^{i\frac{3\pi}{3}} = \frac{1}{8} e^{i\pi} = -\frac{1}{8}$$

$$Z^6 = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = \frac{1}{2^6} e^{i\frac{6\pi}{3}} = \frac{1}{64} e^{i2\pi} = \frac{1}{64}$$

$$Z^{3k} = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3k} = \frac{1}{2^3} e^{i\frac{3k\pi}{3}} = \frac{1}{8} e^{ik\pi}$$

نميز حالتين هما:

$$Z^{3k} = \frac{1}{8} e^{ik\pi} = \frac{1}{8} \text{ إذا كان } k \text{ عدد طبيعي زوجي فإن:}$$

$$Z^{3k} = \frac{1}{8} e^{ik\pi} = -\frac{1}{8} \text{ إذا كان } k \text{ عدد طبيعي فردي فإن:}$$

وفي الحالتين العدد Z^{3k} هو عدد حقيقي

التمرين الثالث (05 نقط)

(1-أ) حساب u_2 والأساس q واستنتاج الحد الأول

$$\begin{cases} \frac{u_2}{q} + 2u_2 + u_2q = 32 \\ u_2^3 = 216 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

$$\begin{cases} q = 3 \vee q = \frac{1}{3} \\ u_2 = 6 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} 1 + 2q + q^2 = \frac{16}{3}q \\ u_2 = 6 \end{cases} \text{ ومنه:}$$

وبمأن المتتالية متزايدة فإن: $q = 3$ و $u_2 = 6$

$$\text{لدينا: } z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(ب) حساب الأطوال AB, AC, BC

$$\text{لدينا: } AB = |z_A - z_B| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |z_A - z_C| = \left|\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right| = 3$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{3}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\text{لدينا: } AB^2 = 12 \text{ و } BC^2 + AC^2 = 9 + 3 = 12$$

ومنه المثلث ABC قائم في C لأن: $BC^2 + AC^2 = AB^2$

(ج) ايجاد طويلة وعمدة للعدد المركب Z

$$\text{لدينا: } Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$$

$$\text{ومنه: } |Z| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(z_C - z_B) - \arg(z_A - z_B)$$

$$\arg(Z) = \arg\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \arg(-2\sqrt{3}i) + 2k\pi$$

$$\arg(Z) = \left(-\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

(د) حساب Z^3 و Z^6 واستنتاج أن Z^{3k} عدد حقيقي

$$h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1} \text{ (2) تبين أن:}$$

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1} \text{ لدينا:}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة h تشكيل جدول تغيراتها

بمأن: $x > -1$ فإن $h'(x) > 0$ ومنه h متزايدة تماما

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$			$+\infty$

(3) حساب $h(0)$ واستنتاج إشارة $h(x)$

$h(0) = 0$ وإشارة $h(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

الجزء الثاني:

(أ-1) حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانيا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(-2 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{x+1} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \text{ لأن:}$$

نستنتج وجود مستقيم مقارب معادلته: $y = -1$ (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 \text{ (ب) البرهان أن}$$

نضع: $t = \ln u$ ومنه $u = e^t$

لدينا: إذا كان $u \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} \text{ ومنه}$$

$$w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} w_n \text{ أي:}$$

(ج) كتابة w_n بدلالة n واستنتاج v_n بدلالة n

$$w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ حيث } w_n = w_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ لدينا:}$$

$$w_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ ومنه:}$$

$$w_n + \frac{2}{3} = \frac{v_n}{u_n} \text{ لدينا: } w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \text{ ومنه:}$$

$$\text{أي: } v_n = u_n \left(w_n + \frac{2}{3} \right) \text{ إذن:}$$

$$v_n = 2 \cdot 3^{n-1} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3} \right) = 4 \cdot 3^{n-2} (2^{-n} + 1)$$

التمرين الرابع (07 نقط)

الجزء الأول:

$$(1) \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} h(x)$$

$$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1) \text{ [معرفة على }]-1, +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + \ln(x+1)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (1 - 2 + \ln(x+1)) = -\infty$$

$$u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3} = 2 \text{ ومنه } u_2 = u_1 q$$

(ب) كتابة عبارة الحد u_n بدلالة n

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ لدينا:}$$

(ج) حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = u_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) \text{ لدينا:}$$

$$S_n = 2 \left(\frac{3^n - 1}{3 - 1} \right) = 3^n - 1 \text{ ومنه:}$$

تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$

$$3^n - 1 = 728 \text{ معناه } S_n = 728$$

$$\text{أي: } 3^n = 279 = 3^6 \text{ إذن: } n = 6$$

(أ-2) حساب v_2 و v_3

$$v_1 = 2 \text{ و } w_{n+1} = \frac{3}{2} v_n + u_n \text{ لدينا:}$$

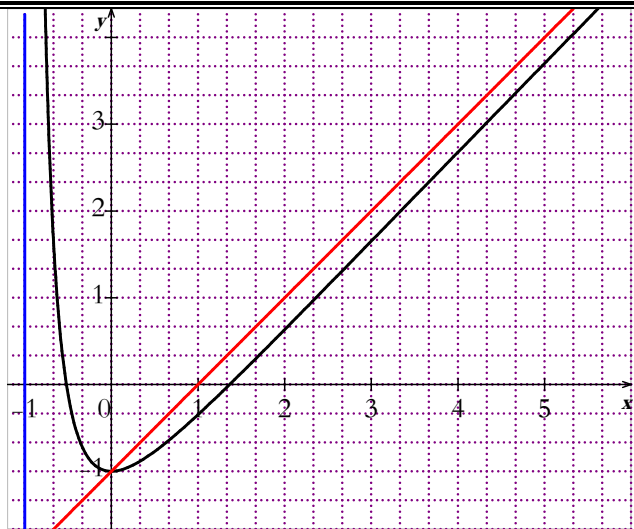
$$v_2 = \frac{3}{2} v_1 + u_1 = \frac{3}{2} (2) + 2 = 5 \text{ ومنه:}$$

$$v_3 = \frac{3}{2} v_2 + u_2 = \frac{3}{2} (5) + 6 = \frac{27}{2}$$

(ب) تبين أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n \text{ معناه } \frac{1}{2} \text{ أساسها } (w_n) \text{ هندسية أساسها}$$

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \text{ لدينا:}$$



(5) حساب المساحة

نرمز بـ A لمساحة الحيز المستوي والمحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها:

$$x = 1, \quad x = 0, \quad y = x - 1$$

$$A = \int_0^1 ((x-1) - f(x)) dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx \quad \text{ومنه:}$$

$$\text{بوضع: } u = \ln(x+1) \text{ فإن } u' = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{الدالة: } x \rightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+1} \text{ من الشكل: } x \rightarrow u(x) \cdot u'(x)$$

$$\text{ومنه الدالة الأصلية لها هي من الشكل: } x \rightarrow \frac{1}{2} [u(x)]^2 + c$$

$$A = \frac{1}{2} [(\ln(x+1))^2]_0^1 = \frac{1}{2} [(\ln(2))^2 - (\ln(1))^2] \quad \text{ومنه:}$$

$$A = \frac{1}{2} (\ln(2))^2 \quad \text{أي:}$$

إعداد الأستاذ: بالعبدي محمد العربي

لدينا: f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ حيث:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \frac{(x+1) - 1 \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{ومنه: } f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

تشكيل جدول التغيرات

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $h(x)$

جدول التغيرات

x	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$	

(3) تبين ان المنحنى (C_f) يقطع المستقيم: $y = 2$

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم: $y = 2$ معناه المعادلة

$$f(x) = 2 \quad \text{تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ محصورا بين } 3,3 \text{ و } 3,4$$

f متزايدة على المجال $[3,3, 3,4]$ حسب جدول التغيرات

$$\text{ولدينا: } f(3,3) = 1,96 \text{ و } f(3,4) = 2,06$$

$$\text{ونلاحظ ان: } f(3,3) < 2 < f(3,4)$$

ومنه وجسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد غدد حقيقي وحيد

$$\alpha \text{ محصورا بين } 3,3 \text{ و } 3,4 \text{ بحيث: } f(\alpha) = 2$$

(4) رسم المنحنى (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0 \quad \text{ومنه:}$$

(ج) استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty - 0 = +\infty$$

$$\text{(د) حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0$$

استنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$ ومنه المنحنى يقبل

مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x - 1$ في جوار $+\infty$

(هـ) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

$$\text{ندرس إشارة الفرق } [f(x) - (x-1)] = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1 > 0$

$$-\ln(x+1) = 0 \quad \text{معناه } \ln(x+1) = 0 \quad \text{أي } x = 0$$

$$-\ln(x+1) \geq 0 \quad \text{معناه } \ln(x+1) \leq 0 \quad \text{أي } -1 < x \leq 0$$

$$-\ln(x+1) \leq 0 \quad \text{معناه } \ln(x+1) \geq 0 \quad \text{أي } x \geq 0$$

نتنتج مايلي:

$$-1 < x \leq 0 \quad \text{معناه } (C_f) \text{ فوق المقارب المائل}$$

$$x = 0 \quad \text{معناه } (C_f) \text{ يقطع المقارب المائل في النقطة } (0; -1)$$

$$x \geq 0 \quad \text{معناه } (C_f) \text{ تحت المقارب المائل}$$

$$(2) \text{ تبين أن } f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$