ثانوية الحسن بن الهيثم بالبيض
الأستاذ : حميدي بوثلجة

السنة الدراسية : 2008/2007
08/06/13

تصحيح البكالوريا 2008 لمادة الرياضيات لشعبة العلوم التجريبية
الموضوع الثاني

التمرين الأول :

معادلة (P) هي : $x - 3z - 4 = 0$ و النقط A(1,3,-1) ، B(4,1,0) ، C(-2, 0,-2) ، D(3, 2,1)

1) الإجابة الصحيحة هي : ج2 لأن :

إحداثيات A تحقق هذه المعادلة لأن: $1-3\times(-1)-4=0$

إحداثيات B تحقق هذه المعادلة لأن: $4-3\times0-4=0$

إحداثيات C تحقق هذه المعادلة لأن : $-2-3\times(-2)-4=0$

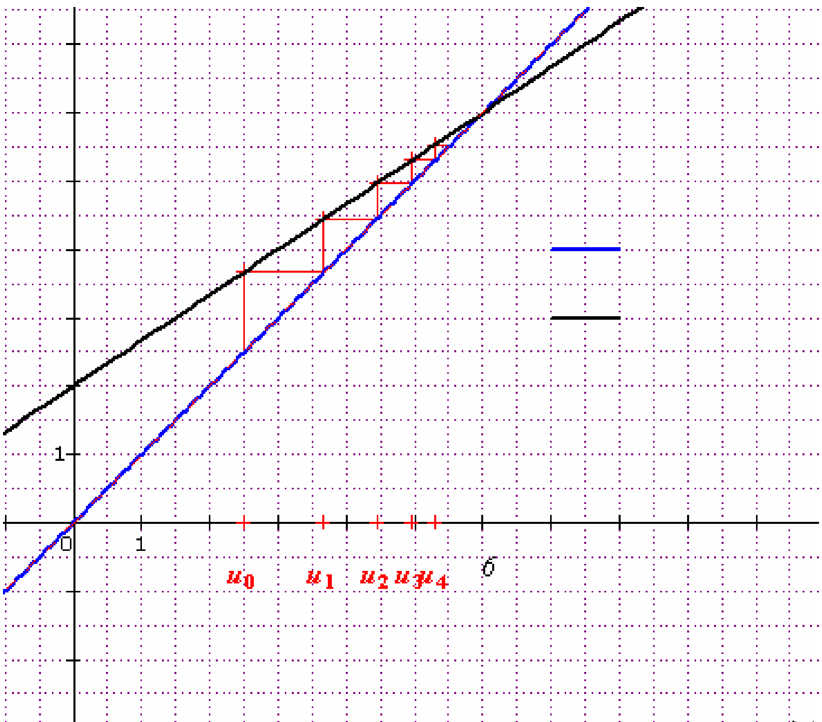
2) الإجابة الصحيحة هي : ج2 لأن :

الشعاع الناظم للمستوي (P) هو $\vec{n}(1,0,-3)$ و $\vec{n_2}=-2\times\vec{n}$ فإن $\vec{n_2}$ شعاع ناظم لـ (P) .

3) الإجابة الصحيحة هي : ج3 لأن :

$$\frac{|3-3\times1-4|}{\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

التمرين الثاني : المتتالية (u_n) معرفة كمايلي : $u_0=\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$



1) أ) تمثيل المستقيم (Δ) و المنحنى (d)

ب) تمثيل على الرسم :

u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4

جـ) في الرسم نلاحظ أن :

* $u_4 \succ u_3 \succ u_2 \succ u_1 \succ u_0$

* الحدود تتراكم حول العدد 6 .

تخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة من العدد 6 .

2) أ) البرهان بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n : $u_n \le 6$

مرحلة التحقق من أجل n = 0 : $u_0=\frac{5}{2}$ و $\frac{5}{2}\le 6$ ، الخاصية صحيحة من أجل n = 0 .

مرحلة الانتقال من الرتبة n إلى الرتبة n + 1 :

n عدد طبيعي كيفي. نفرض أن $u_n \le 6$ ونبرهن أن $u_{n+1}\le 6$

$u_n \le 6$ تكافئ $2\times u_n \le 2\times 6$ تكافئ $\frac{2}{3}\times u_n \le \frac{2}{3}\times 6$ تكافئ $\frac{2}{3}\times u_n + 2 \le \frac{2}{3}\times 6 + 2$ تكافئ $u_{n+1} \le 6$

نستنتج أن مهما يكن العدد الطبيعي n : $u_n \le 6$.

ب) التحقق أن المتتالية (u_n) متزايدة : نبين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n \ge 0$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n = 2 - \frac{1}{3}u_n = \frac{6-u_n}{3}$ ، بما أن $u_n \le 6$ فإن $6 - u_n \ge 0$ نستنتج أن $u_{n+1} - u_n \ge 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة على IN .

جـ) نعم المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 6 و حسب مبرهنة أن كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى متقاربة .

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n - 6$

أ) إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية : نبحث عن عدد حقيقي q حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = q\times v_n$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}(v_n + 6) - 4 = \frac{2}{3}v_n + 4 - 4 = \frac{2}{3}v_n$$

نستنتج أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول : $v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$

ب) عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

بما أن المتتالية (v_n) هندسية فإن : $v_n = v_0 \times (q)^n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ نستنتج أن : $u_n = v_n + 6 = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$

بما أن $-1 \prec \frac{2}{3} \prec 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

<u>التمرين الثالث</u> :

1) حل المعادلة : $\Delta = (i)^2 - 4\times(-2-6i) = -1 + 8 + 24i = 7 + 24i$

حساب جذر تربيعي لـ Δ : نبحث عن عددين حقيقيين x وy حيث : $(x+iy)^2 = 7 + 24i$

المعادلة $(x+iy)^2 = 7 + 24i$ تكافئ : $x^2 - y^2 + 2ixy = 7 + 24i$ بالإضافة إلى ذلك نستنتج من هذه المعادلة أن : $\left|(x+iy)^2\right| = |7+24i|$ أي $x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$.

نستنتج أن $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x^2 = \frac{25+7}{2} = 16 \\ y^2 = \frac{25-7}{2} = 9 \\ 2xy = 24 \end{cases}$ ومنه نأخذ $x = 4$ و $y = 3$

جذر تربيعي لـ Δ : 4 + 3i و $z_2 = \frac{-i+4+3i}{2} = 2 + i$ و $z_1 = \frac{-i-4-3i}{2} = -2-2i$

2) المركز ω للدائرة (Γ) منتصف القطعة [AB] . $z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2-2i+2+i}{2} = -\frac{1}{2}i$

3) * كتابة z_c على شكله الجبري : $z_c = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{2} = \frac{4-i-4i-1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$

* إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) : يكفي أن نثبت أن $\omega C = \frac{AB}{2}$

$$\frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2-2i-2-i|}{2} = \frac{|-4-3i|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\omega C = |z_c - z_\omega| = \left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{1}{2}i\right| = \left|\frac{3}{2}-2i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

نستنتج أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4) أ) تكون نقطة 'M صورة لنقطة M تختلف عن M_0 بالتشابه المباشر S الذي مركزه M_0 إذا تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} M_0M' = k \times M_0M \\ \left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} |z'-z_0| = k \times |z-z_0| \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} \dfrac{|z'-z_0|}{|z-z_0|} = k \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

نستنتج أن العددين المركبين $\frac{z'-z_0}{z-z_0}$ و $k(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ متساويين .

ومنه : $\frac{z'-z_0}{z-z_0} = k \times e^{i\theta}$ أي $z'-z_0 = k \times e^{i\theta}(z-z_0)$. نلاحظ أن لاحقة M_0 كذلك تحقق هذه العلاقة .

ب) التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة التي لاحقتها $-\frac{1}{2}i$ أي ω ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

التمرين الرابع :

1) g دالة معرفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^3+3x^2+3x-1$

أ) جدول تغيرات الدالة g

x	-1	$+\infty$
g'(x)	‖	+
g(x)	‖ -1	↗ $+\infty$

$g(0) = -1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right) \succ 0$

ب) الدالة g دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $]-1,+\infty[$ و بالأخص على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

و $g(0) \prec 0 \prec g\left(\frac{1}{2}\right)$

نستنتج حسب نظرية القيم المتوسطة أنه يوجد عدد حقيقي α حيث : $0 \prec \alpha \prec \frac{1}{2}$ و $g(\alpha) = 0$

جـ) إشارة $g(x)$: بما أن الدالة g متزايدة على $]-1,+\infty[$ نستنتج أن :

لما يكون $x \succ \alpha$ فإن $g(x) \succ g(\alpha)$ أي $g(x) \succ 0$ أي $g(x)$ موجبة على المجال $]\alpha,+\infty[$

لما يكون $-1 \prec x \prec \alpha$ فإن $g(x) \prec g(\alpha)$ أي $g(x) \prec 0$ أي $g(x)$ سالبة على المجال $]-1,\alpha[$.

2) f دالة معرفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من هذا المجال :

$$f'(x) = \frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)\left[(3x^2+6x+3)(x+1) - 2(x^3+3x^2+3x+2)\right]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(3x^2+6x+3)(x+1)-2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^3} = \frac{3x^3+3x^2+6x^2+6x+3x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب) العدد $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ يمثل العدد المشتق للدالة f عند α فهو يساوي : $f'(\alpha)$

$$f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = \frac{0}{(\alpha+1)^3} = 0$$

التفسير الهندسي : المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة α يوازي محور الفواصل .

جـ) $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{(x+1)^2}\right] = 0$

التفسير الهندسي : المنحنى (Γ) يقبل مستقيمين مقاربين الأول معادلته x = -1 و الثاني معادلته y = x + 1 .

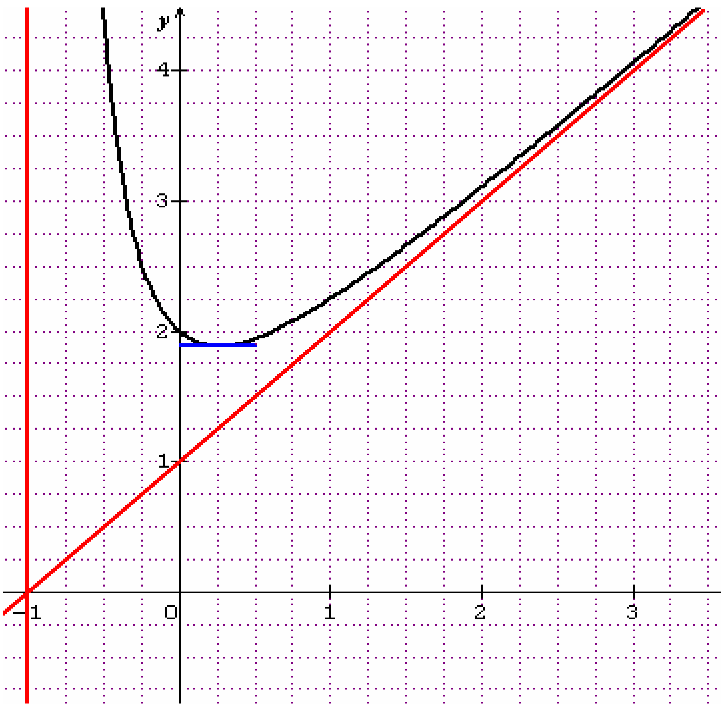
د) جدول تغيرات الدالة f

x	-1		α		+∞
f '(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ +∞	↘	f(α)	↗	+∞

3) α = 0.26

أ) مدور لـ f(α) إلى 10^{-2} : $f(\alpha) \approx \frac{(0.26)^3+3(0.26)^2+3(0.26)+2}{(0.26+1)^2} \approx 1.89$

ب) رسم المنحنى (Γ)



4) ا) كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3+1}{(x+1)^2}=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$$

نستنتج أن $a=1$ و $b=1$

ب) تعيين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]-1,+\infty[$ التي تحقق : $F(1)=2$.

الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-1,+\infty[$ هي الدوال : $x\mapsto \frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

$F(1)=2$ تكافئ $\frac{1}{2}(1)^2+1-\frac{1}{1+1}+c=2$ تكافئ $c=1$ نستنتج أن $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1$

أتمنى إلى كل تلامذتنا الأعزاء النجاح في اليكالوريا والتوفيق في مسارهم الدراسي .

الأستاذ : بوثلجة حميدي