ثانوية الحسن بن الهيثم بالبيض — السنة الدراسية : 2008/2007

الأستاذ : حميدي بوثلجة — 08/06/12

تصحيح لبكالوريا 2008 لمادة الرياضيات لشعبة العلوم التجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) *حل المعادلة : $\Delta = (1+2i)^2 - 4\times(-1+i) = -3+4i+4-4i = 1 = (1)^2$

$z_2 = \dfrac{1+2i+1}{2} = 1+i$ و $z_1 = \dfrac{1+2i-1}{2} = i$ لأن $|1+i| = \sqrt{2}$ و $|i| = 1$ و $\sqrt{2} \succ 1$

* $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \left(\dfrac{i}{1+i}\right)^{2008} = \left(\dfrac{i(1-i)}{2}\right)^{2008} = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^{2008} = \left(\dfrac{(1+i)^2}{4}\right)^{1004} = \left(\dfrac{2i}{4}\right)^{1004} = \left(\dfrac{(-1)^{502}}{2^{1004}}\right) = \dfrac{1}{2^{1004}}$

2) ا) * لبرهان أن $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$ يكفي أن نثبت أن $e^{-i\theta}\times e^{i\theta} = 1$

لدينا : $e^{-i\theta}\times e^{i\theta} = e^{(-i\theta+i\theta)} = e^0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$

* $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}\times\dfrac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2} = e^{i\theta_1 - i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

ب) * كتابة Z على شكله الأسي : $Z = \dfrac{z_2-1}{z_1-1} = \dfrac{1+i-1}{i-1} = \dfrac{i}{i-1} = \dfrac{i(-i-1)}{2} = \dfrac{1-i}{2}$

نسمي θ عمدة للعدد $1-i$ بما أن $|1-i| = \sqrt{2}$ و $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin(\theta) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ فإن: $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$

نستنتج أن: $Z = \dfrac{1}{2}(1-i) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

جـ) * كتابة Z على شكله المثلثي : $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

* $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ تكافئ $\dfrac{z_2-1}{z_1-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

نستنتج أن : $z_2 - 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\times(z_1-1)$ أي أن النقطة C صورة النقطة B

بالتشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $-\dfrac{\pi}{4}$

التمرين الثاني :

1) معادلة (P) هي : x + 2y – z + 7 = 0 و النقط A(2,0,1) ، B(3,2,0) وC(-1,-2,2)

* التحقق أن النقط A، B، C ليست على إستقامية : يكفي أن نبين أن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ لايوازي $\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1\,,2\,,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3\,,-2\,,1)$ و لايوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AC} = k\times\overrightarrow{AB}$

لأن : $1 = (-1)\times(-1)$ و $-2 = (-1)\times(2)$ ولكن $-3 \neq (-1)\times(1)$

* معادلة المستوي (ABC) هي : y + 2z -2 = 0 لأن :

إحداثيات A تحقق هذه المعادلة لأن: $0+2\times1-2=0$

إحداثيات B تحقق هذه المعادلة لأن: $2+2\times0-2=0$

إحداثيات C تحقق هذه المعادلة لأن : $-2+2\times2-2=0$

بما أن النقط A ، B ،C ليست على استقامية فإن المعادلة المعطاة هي معادلة المستوي (ABC) .

2)

أ) * المستويين (P) و(ABC) متعامدين لأن : الشعاع الناظم $\vec{n}(1\,,2\,,-1)$ للمستوي (P) و الشعاع الناظم $\vec{n}'(0\,,1\,,2)$ للمستوي(ABC) متعامدين : $\vec{n}\times n'=1\times0+2\times1+(-1)\times2=2-2=0$

* تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و(ABC) .

لدينا تمثيل ديكارتي للمستقيم (Δ) : $\begin{cases}x+2y-z+7=0\\y+2z-2=0\end{cases}$ بوضع مثلا $z=t$ نجد $\begin{cases}x=-2y+t-7\\y=-2t+2\end{cases}$

أي $\begin{cases}x=-2(-2t+2)+t-7\\y=-2t+2\end{cases}$ نستنتج تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) : $(t\in IR)$ $\begin{cases}x=5t-11\\y=-2t+2\\z=t\end{cases}$

ب) المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ): بما أن المستويان (P) و (ABC) و A تنتمي إلى المستوي (ABC) فإن المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) تساوي المسافة بين A و المستوي (P) .

نستنتج أن المسافة المطلوبة تساوي : $\dfrac{|2+2\times0-1+7|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt6}=\dfrac{8\sqrt6}{6}=\dfrac{4\sqrt6}{3}$

<u>طريقة ثانية :</u> (طويلة نوعا ما)

المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ): هي أصغر طول AM ، حيث M نقطة كيفية من المستقيم (Δ) .

لتكن M نقطة كيفية من (Δ) إحداثياتها $(5t-11\,,-2t+2\,,t)$ ، نحسب الطول AM بدلالة t

$$AM=\sqrt{(5t-11-2)^2+(-2t+2-0)^2+(t-1)^2}=\sqrt{30t^2-140t+174}$$

حتى يكون الطول AM أصغر ما يمكن يكفي أن يكون AM^2 اصغر ما يمكن

نضع $f(t)=30t^2-140t+174$. بعد حساب المشتق للدالة f نجد أنها تقبل قيمة حدية صغرى لما $t=\dfrac{140}{60}=\dfrac{7}{3}$

بتعويض قيمة t في عبارة AM نجد المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ):

$$\sqrt{\left(5\frac{7}{3}-13\right)^2+\left(-2\frac{7}{3}+2\right)^2+\left(\frac{7}{3}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{96}{9}}=\frac{4\sqrt6}{3}$$

3) * إحداثيات G: نسمي (x,y,z) إحداثيات G :

$$x=\frac{1\times2+\alpha\times3+\beta\times(-1)}{1+\alpha+\beta} \text{ و } y=\frac{1\times0+\alpha\times2+\beta\times(-2)}{1+\alpha+\beta} \text{ و } z=\frac{1\times1+\alpha\times0+\beta\times2}{1+\alpha+\beta}$$

أي $x=\dfrac{3\alpha-\beta+2}{1+\alpha+\beta}$ و $y=\dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}$ و $z=\dfrac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}$

النقطة G تنتمي إلى المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t حيث :

$$\begin{cases}\dfrac{3\alpha-\beta+2}{1+\alpha+\beta}=5t-11\\ \dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}=-2t+2\\ \dfrac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}=t\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\dfrac{3\alpha-\beta+2}{1+\alpha+\beta}=5\left(\dfrac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}\right)-11\\ \dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}=-2\left(\dfrac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}\right)+2\\ \dfrac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}=t\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}14\alpha=-8\\ 0\beta=0\\ \dfrac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}=t\end{cases}$$

نستنتج $\alpha=-\dfrac{8}{14}=-\dfrac{4}{7}$ و β كيفي و $t=\dfrac{14\beta+7}{3+7\beta}$

<u>التمرين الثالث</u> :

1) $I=[\,1,2\,]$ و $f(x)=\dfrac{x+2}{-x+4}$

أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على I و $f\,'(x)=\dfrac{1(-x+4)-(-1)(x+2)}{(-x+4)^2}=\dfrac{2}{(-x+4)^2}$

مهما يكن العدد x من المجال $[\,1,2\,]$ فإن $f\,'(x)\succ 0$ ، نستنتج أن f متزايدة تماما على I

ب) بما أن f متزايدة تماما على I نستنتج أن لما $1\le x\le 2$ فإن $f(1)\le f(x)\le f(2)$

$f(1)=\dfrac{1+2}{-1+4}=1$ و $f(2)=\dfrac{2+2}{-2+4}=2$ نستنتج أن $1\le f(x)\le 2$ أي $f(x)$ تنتمي إلى I

2)

ا) البرهان بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

مرحلة التحقق من أجل n = 0 : $u_0=\dfrac{3}{2}$ و $1\le\dfrac{3}{2}\le 2$ نستنتج أن u_0 ينتمي إلى I.

مرحلة الانتقال من الرتبة n إلى الرتبة n + 1 :

n عدد طبيعي كيفي. نفرض أن u_n تنتمي إلى I ونبرهن أن u_{n+1} تنتمي إلى I

لدينا $1\le u_n\le 2$ نستنتج أن $f(1)\le f(u_n)\le f(2)$ وبالتالي $1\le u_{n+1}\le 2$ أي u_{n+1} تنتمي إلى I

خلاصة : مهما يكن العدد الطبيعي n ، u_n ينتمي إلى I

ب) اتجاه تغير المتتالية (u_n) . من أجل n عدد طبيعي كيفي :

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{u_n+2}{-u_n+4}-u_n=\frac{(u_n)^2-3u_n+2}{-u_n+4}=\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{-u_n+4}$$

بما أن $1\le u_n\le 2$ فإن : $u_n-1\ge 0$ و $u_n-2\le 0$ و $-u_n+4\ge 0$ نستنتج أن $u_{n+1}-u_n\le 0$.

المتتالية (u_n) متناقصة على IN .

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة على IN ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

3) أ) البرهان بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n : $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}$

مرحلة التحقق من أجل n = 0 : $u_0=\dfrac{3}{2}$ و $u_0=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^0+1}=1+\dfrac{1}{1+1}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل n = 0

مرحلة الانتقال من الرتبة n إلى الرتبة n + 1 :

n عدد طبيعي كيفي. نفرض أن : $u_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$ و نبرهن أن $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} = \frac{1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} + 2}{-\left(1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}\right) + 4} = \frac{3 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}{3 - \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}} = \frac{3\times\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\times\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}$$

بوضع : $X = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ فإن $u_{n+1} = f(X) = \dfrac{3X + 4}{3X + 2} = 1 + \dfrac{2}{3X + 2} = 1 + \dfrac{1}{\frac{3}{2}X + 1}$ نستنتج أن :

$$u_{n+1} == \frac{3\times\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\times\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$

ب) بما أن $\frac{3}{2} \succ 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

<u>التمرين الرابع</u> :

I) f دالة معرفة على المجال $]-2, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ ، (C_f) منحنى f

النقطة A تنتمي إلى (C_f) تعني : $f(-1) = 1$ أي $(-a + b)e^1 + 1 = 1$ *

معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند A يساوي e– تعني أن $f'(-1) = -e$. **

f' ترمز للدالة المشتقة للدالة f . من أجل x من المجال $]-2, +\infty[$:

$f'(x) = (a)\times e^{-x} + (ax + b)\times\left(-e^{-x}\right) + 0 = (-ax - b + a)\times e^{-x}$ و $f'(-1) = (a - b + a)e^1 = (2a - b)e$

من المعادلتين * و** نستنتج أن $(-a + b) = 0$ و $(2a - b) = -1$ و بالتالي $a = -1$ و $b = -1$

II) g دالة معرفة على المجال $]-2, +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1 = f(x)$

ا) $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$. التفسير البياني : المستقيم الذي معادلته y = 1

مقارب للمنحنى (C_g) الممثل للدالة g

ب) دراسة تغيرات الدالة g : * $g(-2) = (2 - 1)e^2 + 1 = e^2 + 1$

* الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-2, +\infty[$ و $g'(x) = f'(x) = x\times e^{-x}$

إشارة g' هي إشارة x نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ و متناقصة تماما على $]-2, 0]$

* جدول تغيرات الدالة g

x	-2		0		+∞
g'(x)		-	0	+	
g(x)	e^2+1	↘	0	↗	1

جـ) * المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف :

الدالة المشتقة g' تقبل الاشتقاق على $]-2\,,+\infty[$ و $g''(x)=1\times e^{-x}+x\times\left(-e^{-x}\right)=(1-x)e^{-x}$

المشتقة الثانية g'' تنعدم عند 1 مع تغيير إشارتها نستنتج أن النقطة التي فاصلتها 1 من المنحنى (C_g) نقطة انعطاف. إحداثيتي I هما $I(1\,,g(1))$ أي $I\left(1\,,-2e^{-1}+1\right)$

د) معادلة المماس عند النقطة I : $y=g'(1)(x-1)+g(1)=e^{-1}(x-1)+1-2e^{-1}$ إي $y=e^{-1}x+1-3e^{-1}$

هـ) رسم المنحنى (C_g)

و) H الدالة العددية المعرفة على $]-2\,,+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$

الدالة H قابلة للاشتقاق على $]-2\,,+\infty[$ و $H'(x)=(\alpha x+\beta)\times\left(-e^{-x}\right)+\alpha\times e^{-x}=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}$

حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto g(x)-1$ على المجال $]-2\,,+\infty[$ يجب : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2\,,+\infty[$: $H'(x)=g(x)-1$ أي $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$

بالمطابقة نجد : $\alpha=1$ و $\beta=-2$

بما أن $g(x)=g(x)-1+1=H'(x)+1$ فإن الدوال الأصلية للدالة g على المجال $]-2\,,+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto H(x)+x+b$ حيث b عدد حقيقي

البحث عن الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0 : $H(0)+0+b=0$ أي $(0-2)e^{0}+b=0$ أي $b=2$

الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0 هي الدالة : $x\mapsto(x-2)e^{-x}+x+2$.

III) k الدالة العددية المعرفة على $]-2\,,+\infty[$ كما يلي : $k(x)=g(x^2)$

الدالة k مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]-2\,,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق على هذا المجال .

و من اجل كل عدد حقيق x من $]-2\,,+\infty[$: $k'(x)=2x\times g'(x^2)=2x\times\left(x^2\times e^{-x^2}\right)=2x^3\times e^{-x^2}$

إشارة المشتقة $k'(x)$ هي إشارة x إذا الدالة k لها نفس اتجاه تغير الدالة g .

نستنتج جدول تغيراتها :

x	2		0		$+\infty$
$k'(x)$		-	0	+	
$k(x)$	$-5e^{-4}+1$	↘	0	↗	$+\infty$