الموضوع الأول

التمرين الأول (03 نقط)

تحديد الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث مع التعليل

الاقتراح	الإجابة ص	التعليل
1	ب) م. هندسية	$v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{2}=3(u_n+\frac{1}{2})=3v_n$
2	جـ) النهاية هي: $-\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-\frac{1}{2})$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2}.3^n-\frac{1}{2})=-\infty$
3	جـ) المجموع S_n هو	$S_n=-\frac{1}{2}\left[1+3+3^2+....+3^n\right]$ $=-\frac{1}{2}\left[1.\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right]=\frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين الثاني (05 نقط)

1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P)

(P) له معادلة من الشكل: $ax+by+cz+d=0$

لدينا: الشعاع $\vec{n}(-2;1;5)$ ناظمي للمستوي (P)

ومنه (P) معادلته من الشكل: $-2x+y+5z+d=0$

$A\in(P)$ معناه $-2+(-2)+5+d=0$ ومنه: $d=-1$

ومنه (P) معادلته من الشكل: $-2x+y+5z-1=0$

2-أ) التحقق أن النقطة B مشتركة بين المستويين (P) و(Q)

لدينا: $B\in(P)$ لأن: $-2(-1)+(4)+5(-1)-1=0$

لدينا: $B\in(Q)$ لأن: $(-1)+2(4)-7=0$

ومنه النقطة B مشتركة بين المستويين (P) و (Q)

ب) بيان أن (P) و(Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

(P) و(Q) متقاطعان معناه $\vec{n}_P$ لا يوازي $\vec{n}_Q$

$\vec{n}_P(-2;1;5)$ لا يوازي $\vec{n}_Q(1;2;0)$ لأن: $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-2}$

إذن (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

لتعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) نحل الجملة التالية:

$$\begin{cases}x+2y-7=0..........(1)\\-2x+y+5z-1=0....(2)\end{cases}$$

نضع: $y=t$ حيث t وسيط حقيقي

من المعادلة (1) نجد: $x=-2t+7$

بتعويض قيمة كل من x و y في المعادلة (2) نجد:

$-2(-2t+7)+t+5z-1=0$ ومنه: $z=-t+3$

التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو: $\begin{cases}x=-2t+7\\y=t\\z=-t+3\end{cases}$ و $(t\in\mathbb{R})$

3-أ) حساب المسافة بين C و(P) ثم بين C و(Q)

$$d(C;(P))=\frac{|-2(5)+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(5)^2}}=\frac{18}{\sqrt{30}}$$

$$d(C;(Q))=\frac{|(5)+2(-2)-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

ب) إثبات أن المستويين (P) و(Q) متعامدان

(P) و(Q) متعامدان معناه $\vec{n}_P$ يعامد $\vec{n}_Q$ معناه $\vec{n}_P.\vec{n}_Q=0$

$\vec{n}_Q.\vec{n}_P=1(-2)+2(1)+0(5)=0$ إذن $(P)\perp(Q)$

جـ) استنتاج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ)

المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ) هي الطول CH

حيث H هي المسقط العمودي للنقطة C على (Δ)

لدينا: $CH^2=d(C;(P))^2+d(C;(Q))^2$

ومنه: $CH=\sqrt{d(C;(P))^2+d(C;(Q))^2}=3\sqrt{2}$

التمرين الثالث (05 نقط)

1-أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-4+i+i}{2+3i+i}=\frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{20i}{20}=i$$

ب- تعيين طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له

$$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i|=1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

نستنتج مما سبق أن: $AC=AB$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

2-أ) تعيين طبيعة التحويل T وتحديد عناصره المميزة

من العبارة المركبة للتحويل T لدينا: $a=i$ و $b=-1-i$

التحويل T دوران لأن $|a|=1$

العناصر المميزة هي الزاوية $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$ والمركز هو A

لأن: $\frac{b}{1-a}=\frac{-1-i}{1-i}=\frac{(-1-i)(1+i)}{2}=-i=z_A$

ب- تعيين صورة النقطة B بالتحويل T

لدينا: $z'_B = iz_B - 1 - i = i(2+3i) - 1 - i = -4 + i$

ومنه صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C

3-أ) بيان أن النقط A، C وD في استقامية

النقط A ، C وD في استقامية معناه $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-6+3i}{-4+2i} = \frac{(-6+3i)(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)} = \frac{3}{2}$$

و منه النقط A ، C و D في استقامية.

ب)تعيين نسبة التحاكي h

العبارة المختصرة المركبة للتحاكي h هي:

$z_D - z_A = k(z_C - z_A)$ حيث k هي نسبة التحاكي h

ومنه : $k = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}$

ج)تعيين العناصر المميزة للتشابه S

العبارة المختصرة المركبة للتشابه S هي:

$z_D - z_A = a(z_B - z_A)$ حيث عدد مركب و $a = [r;\theta]$

$$a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6+3i}{2+4i} = \frac{(-6+3i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{30i}{20} = \frac{3}{2}i$$

ومنه نسبة التشابه S هي $|a| = \frac{3}{2}$ وزاوية هي $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$

التمرين الرابع (07نقط)

I) بقراءة بيانية

أ)تشكيل جدول التغيرات للدالة g.

x	$-\infty$	-1		$+\infty$
$g'(x)$	+		+	
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 1$	

ب)حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$

من البيان $g(x) > 0$ تكافئ $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

لأن (C_g) يقع فوق محور الفواصل على هاذيْن المجاليْن.

ج)تعيين بيانيا قيم x والتي من أجلها يكون $0 < g(x) < 1$

من البيان لدينا: $0 < g(x) < 1$ تكافئ $x \in]1;+\infty[$

II-1) حساب $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 + 0 = 1$$

التفسير الهندسي للنتيجتين

* (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = 1$

* (C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$

2-أ) بيان أن $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ **من اجل كل** $x \in]1;+\infty[$

$$g'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب)حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$$f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

ومنه: $= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما من أجل كل $x \in]1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	1

3-أ) تعيّين إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$

من I) جـ- لدينا: $x \in]1;+\infty[$ تكافئ $0 < g(x) < 1$

ومنه: $\ln[g(x)] < \ln 1$ أي : $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$

ب)بيان أن الدالة $x \to (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ أصلية للدالة $x \to \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$

$$[(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x]' = 1.\ln(x-\alpha) + \frac{1}{x-\alpha}(x-\alpha) - 1$$

$$= 1.\ln(x-\alpha) + 1 - 1 = \ln(x-\alpha)$$

جـ)التحقق أن $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ **من أجل كل** $x \in]1;+\infty[$

لدينا: $g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-1-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

لدينا: $f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

الدالة الأصلية لـ g هي الدالة: $x \to x - 2\ln(x+1)$

حسب الجواب 3-ب) نستنتج أن الدالة الأصلية للدالة $x \to \ln(x-1)$ هي الدالة $x \to (x-1)\ln(x-1) - x$

و الدالة الأصلية للدالة $x \to \ln(x+1)$ هي الدالة $x \to (x+1)\ln(x+1) - x$ ومنه دالة أصلية لـ f هي الدالة F حيث :

$$F(x) = x + (x-1)\ln(x-1) - (x+3)\ln(x+1)$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقط)

1-أ) بيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها α

(v_n) هندسية أساسها α معناه $v_{n+1}=\alpha v_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

لدينا: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha-1}$ و $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha u_n+1+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha(u_n+\frac{1}{\alpha-1})=\alpha v_n$$

ب) كتابة v_n بدلالة n و α واستنتاج u_n بدلالة n و α

لدينا: $v_n = v_0.q^n$ حيث $v_0 = u_0 + \frac{1}{\alpha-1} = 6 + \frac{1}{\alpha-1}$

ومنه: $v_n = \left(6+\frac{1}{\alpha-1}\right).\alpha^n = \frac{6\alpha^{n+1}-5\alpha^n}{\alpha-1}$

لدينا: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha-1}$ ومنه: $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha-1}$

ومنه $u_n = \frac{6\alpha^{n+1}-5\alpha^n}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1} = \frac{6\alpha^{n+1}-5\alpha^n-1}{\alpha-1}$

جـ)تعيين قيم α التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة

حتى تكون (u_n) متقاربة يجب أن يكون الأساس $0 \prec \alpha \prec 1$

2- حساب المجموعين S_n و T_n

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0(\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1})$$

لدينا:

$$= 8\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right] = 16(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1)$$

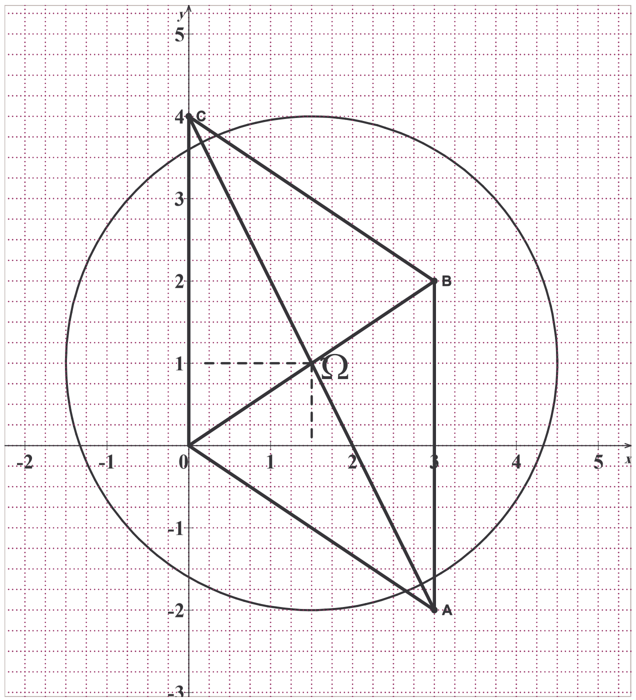
لدينا $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

نعلم أن $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha-1}$ ومنه $u_n = v_n - 2$ وعليه:

$$T_n = (v_0-2)+(v_1-2)+.....+(v_n-2)$$
$$=(v_0+v_1+.....+v_n)-2(n+1) = S_n - 2(n+1)$$

التمرين الثاني (04 نقط)

1.أ) تعليم النقط A ، B و C



ب) تعيين طبيعة الرباعي OABC مع التعليل

الرباعي OABC متوازي أضلاع لأن :

$\overrightarrow{OC}(4i) = \overrightarrow{AB}(4i)$ أي $\overrightarrow{OC}(z_C - z_O) = \overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$

جـ) تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي OABC

النقطة Ω هي منتصف القطرين $[AC]$ و $[OB]$

لاحقة Ω هي: $z_\Omega = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{0+3+2i}{2} = \frac{3}{2}+i$

2)تعيين وإنشاء مجموعة النقط (E)

لدينا: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 12$.......(*)

(*) تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 12$ لأن Ω مركز الرباعي OABC

(*) تكافئ $\left\|\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 3$ وعليه مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها Ω ونصف قطرها 3 .

ملاحظة: إنشاء (E) في الشكل السابق.

3-أ) حل المعادلة $z^2 - 6z + 13 = 0$ في $\mathbb{C}$

لحل هذه المعادلة نستعمل المميز المختصر: $\Delta'=b'^2-ac$

لدينا: $\Delta' = (-3)^2 - (1)(13) = -4$ أي $\Delta' = (2i)^2$

ومنه حلا المعادلة هما : $z_0 = 3-2i$ ، $z_1 = 3+2i$

ب)تعيين مجموعة النقط M من المستوي

لدينا: $|z - z_0| = |z - z_1|$ تكافئ $|z - z_A| = |z - z_B|$

تكافئ $MA = MB$

مجموعة النقط M ذات الاحقة Z هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الثالث (05 نقط)

1-أ)كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)

لدينا: (Δ) يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له

$M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) معناه $\overrightarrow{BM} = t\vec{u}$ (t وسيط حقيقي)

لدينا: $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-7 \end{pmatrix} = t\vec{u}\begin{pmatrix} t \\ -4t \\ -t \end{pmatrix}$ معناه $\overrightarrow{BM}$ $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -4t+1 \\ z = -t+7 \end{cases}$

الجملة الأخيرة هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

ب) التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ)

$C \in (\Delta)$ معناه توجد قيمة وحيدة لـ t

تحقق الجملة $\begin{cases}3=t+2\\-3=-4t+1\\6=-t+7\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=1\\t=1\\t=1\end{cases}$

جـ)بيان أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان:

لدينا: $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=1.2+(-4)0+1(-2)=0$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}=0$ إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د)استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) هي الطول AB

لأن $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$ والنقطتان B و C تنتميان إلى (Δ).

ومنه: $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$

2-أ)كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t

لدينا: $h(t)=AM$

$AM=\sqrt{(2+t)^2+(-4t)^2+(2-t)^2}=\sqrt{18t^2+8}$

ب)بيان $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$ من أجل كل عدد حقيقي t

لدينا: $h(t)=\sqrt{18t^2+8}$ ومنه: $h'(t)=\dfrac{2(18t)}{2\sqrt{18t^2+8}}=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$

جـ)استنتاج قيمة t التي من أجلها تكون المسافة AM أصغر ما يمكن:

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما يكون للدالة h قيمة حدّية صغرى (ينعدم المشتق ويغير إشارته)

$h'(t)=0$ معناه $\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}=0$ ومنه : t=0

إشارة المشتق: $h'(t)$ هي حسب الجدول التالي

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(t)$	-	0	+

-المقارنة بين القيمة الحدية الصغرى لـ h والمسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

نجد أن $h(0)=2\sqrt{2}=AB$.

التمرين الرابع (07 نقط)

1-أ)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-ex-1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-ex-1)=+\infty-\infty$ ح.ع.ت

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{e^x}{x}-e-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{e^x}{x})=+\infty$

ب)حساب f'(x) ودراسة إشارتها

$f'(x)=e^x-e$ وإشارته هي

- 1 +

جـ)تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	-	0 +	
f(x)	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

2-أ)بيان أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

لدينا: المستقيم (Δ) له معادلة من الشكل: $y=-ex-1$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) في جوار $-\infty$.

ب)كتابة معادلة للمماس(T)

(T) له معادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

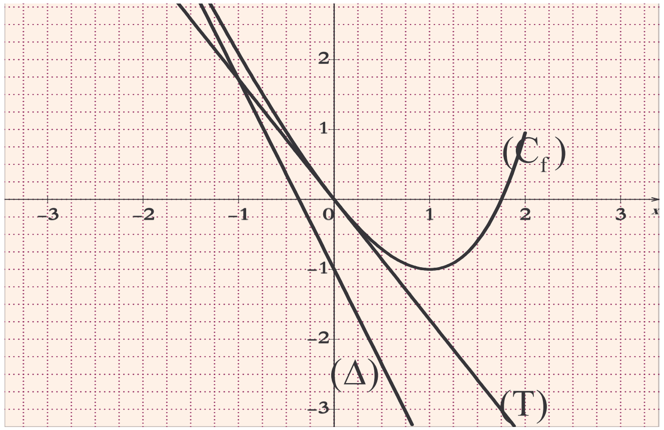
ومنه: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي: $y=(1-e)(x-0)+0=(1-e)x$

جـ)بيان ان المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا α

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1,75;1,76[$ و $f(1,75)\times f(1,76)\prec 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α.

د)رسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحنى (C_f)



3-أ)حساب المساحة $A(\alpha)$

$A(\alpha)=-\int_0^\alpha f(x).dx=-\left[e^x-\frac{1}{2}ex^2-x\right]_0^\alpha$

نجد بعد الحساب $A(\alpha)=\left(1-e^\alpha+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha\right)u.a$

ب)إثبات أن $A(\alpha)=\frac{1}{2}e.\alpha^2-e.\alpha+\alpha$

لدينا: $f(\alpha)=0$ من الجواب 2-جـ) ومنه: $e^\alpha=e.\alpha+1$

بتعويض e^α بما يساويها في عبارة $A(\alpha)$، نجد

$A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)u.a$.