الموضوع الأول

التمرين الأول (06 نقط)

1)بيان أن العددين a و b متوافقان بترديد 5

a وb متوافقان بترديد 5 معناه لهما نفس باقي القسمة على 5

لدينا: $a = 619 = 5.123 + 4$ معناه $a \equiv 4[5]$

$b = 2124 = 5.424 + 4$ معناه $b \equiv 4[5]$

إذن a و b متوافقان بترديد 5.

2-أ) بيان أن $2124 \equiv -1[5]$

$b \equiv 4[5]$ معناه $b \equiv -1[5]$ لأن $4 \equiv -1[5]$

ب)استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من 2124^{720} و 619^{721} **على 5**

لدينا: $2124 \equiv -1[5]$ ومنه $2124^{720} \equiv (-1)^{720}[5]$

وبما أن $(-1)^{720} = 1$ فإن $2124^{720} \equiv 1[5]$

لدينا: $619 \equiv -1[5]$ ومنه $619^{721} \equiv (-1)^{721}[5]$

وبما أن $(-1)^{721} = -1$ فإن $619^{721} \equiv -1[5]$

أي $619^{721} \equiv 4[5]$ لأن $-1 \equiv 4[5]$

جـ)بيان أن $2124^{2n} \equiv 1[5]$ **من أجل كل عدد طبيعي n**

لدينا: $2124 \equiv -1[5]$ ومنه $2124^{2n} \equiv (-1)^{2n}[5]$

وبما أن $(-1)^{2n} = 1$ فإن $2124^{2n} \equiv 1[5]$

د)تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$

لدينا $2124^{2n} \equiv 1[5]$ ومنه $2124^{4n} \equiv 1[5]$

لدينا $619 \equiv -1[5]$ ومنه $619^{4n+1} \equiv (-1)^{4n+1}[5]$

أي $619^{4n+1} \equiv -1[5]$

وعليه $2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$ تكافئ $n \equiv 0[5]$

ومنه: $n = 5k$ حيث k عدد طبيعي .

التمرين الثاني (05 نقط)

أ-1)حساب u_0 ، ثم كتابة الحد العام u_n بدلالة n

لدينا: (u_n) متتالية هندسية حيث $q = 3$ و $u_0 + u_3 = 28$

نعلم أن: $u_3 = u_0.q^3$ ومنه $u_3 = u_0.3^3 = u_0 27$

وعليه: $u_0 + u_3 = 28$ تكافئ $u_0 + u_0.27 = 28$

تكافئ $28u_0 = 28$ ومنه $u_0 = 1$

نعلم أن: $u_n = u_0.q^n$ ومنه $u_n = 1.3^n$ أي $u_n = 3^n$.

2-)حساب المجموع S_1

لدينا: $S_1 = u_0 + u_1 + .. + u_9 = u_0\left(\dfrac{q^{10} - 1}{q - 1}\right)$

ومنه: $S_1 = 1\left(\dfrac{3^{10} - 1}{3 - 1}\right) = \dfrac{3^{10} - 1}{2} = 29524$

ب-1)بيان أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها

(v_n) متتالية حسابية معناه $v_{n+1} - v_n = r$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

لدينا: $v_n = 1 - 5n$ ومنه $v_{n+1} = 1 - 5(n+1) = -5n - 4$

وعليه: $v_{n+1} - v_n = (-5n - 4) - (1 - 5n)$

$= -5n - 4 + 5n - 1 = -5$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

بما أن الأساس سالب فإن المتتالية (v_n) متناقصة تماما

2)حساب المجموع S_2

لدينا: $S_2 = v_0 + v_1 + ... + v_9 = \dfrac{10}{2}(v_0 + v_9)$

لكن : $v_0 = 1 - 5(0) = 1$ و $v_9 = 1 - 5(9) = -44$

ومنه: $S_2 = v_0 + v_1 + ... + v_9 = \dfrac{10}{2}(1 - 44) = -215$

جـ)التحقق أن $k_n = u_n + v_n$ و استنتاج المجموع S

لدينا: $v_n = 1 - 5n$ و $u_n = 3^n$

ومنه: $u_n + v_n = 3^n + 1 - 5n = k_n$

لدينا: $S = k_0 + k_1 + ... + k_n$

$S = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + ... + (u_9 + v_9)$

ومنه : $= (u_0 + u_1 + .. + u_9) + (v_0 + v_1 + ... + v_9)$

$= S_1 + S_2 = 29524 - 215 = 29309$

التمرين الثالث (08 نقط)

1)حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها واستنتاج أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين

لدينا: $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$ و $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

هذا معناه أن (C) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته y=1

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{4}{x-2} = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{4}{x-2} = +\infty$

وهذا معناه أن (C) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته x=2

2) حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها

لدينا: $f'(x)=\frac{1(x-2)-1(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{-4}{(x-2)^2}\prec 0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها

3)تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		-	‖	-	
f(x)	1 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ 1	

4) تعيين نقط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات

أولا: نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل

f(x)=0 معناه $x+2=0$ معناه $x=-2$

(C) يقطع محور الفواصل في النقطة التي إحداثياها $(-2;0)$

ثانيا: نقطة تقاطع (C) مع محور التراتيب

لدينا : $f(0)=-1$

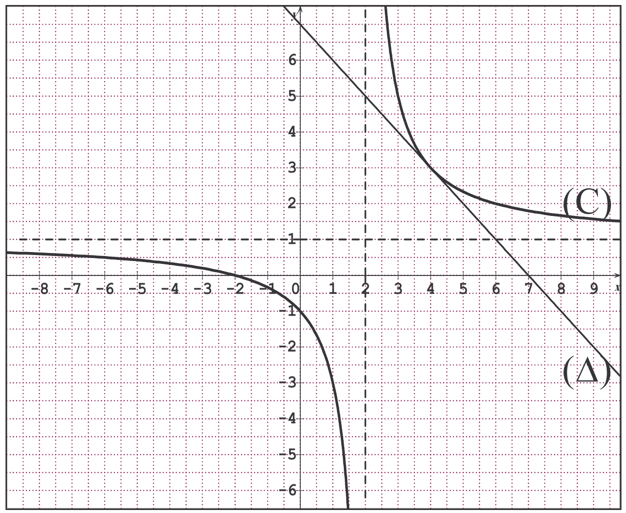
(C) يقطع محور التراتيب في النقطة التي احداثياها $(0;-1)$

5) كتابة معادلة للمماس (Δ)

معادلة المماس (Δ) لـ (C) عند النقطة ذات الفاصلة 4 هي

$y=f'(4)(x-4)+f(4)=-1(x-4)+3=-x+7$

6)إنشاء المماس (Δ) والمنحنى (C)



الموضوع الثاني

التمرين الأول (06 نقط)

1)تعيين باقي القسمة الإقليدية على7 لكل من a×b و a^2-b^2

لدينا:باقي قسمة a على 7 هو 3 معناه $a\equiv 3[7]$....(1)

باقي قسمة b على 7 هو 4 معناه $b\equiv 4[7]$.....(2)

باقي قسمة c على 7 هو 6 معناه $c\equiv 6[7]$.....(3)

من (1) و(2) نستنتج أن:

$a\times b\equiv 3\times 4[7]$ ومنه $a\times b\equiv 5[7]$ لأن $12\equiv 5[7]$

ومنه باقي قسمة a×b على 7 هو 5

من (1) و(3) نستنتج أن:

$a^2-b^2\equiv 3^2-4^2[7]$ معناه $a^2-b^2\equiv -7[7]$

ومنه $a^2-b^2\equiv 0[7]$ لأن $-7\equiv 0[7]$

ومنه باقي قسمة a^2-b^2 على 7 هو 0

2-أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $c^{2n}\equiv 1[7]$

لدينا $c\equiv 6[7]$ أيْ $c\equiv -1[7]$ و منه $c^{2n}\equiv(-1)^{2n}[7]$

أي $c^{2n}\equiv 1[7]$ و هو المطلوب إثباته.

ب)التحقق أنّ $48\equiv 6[7]$ ثم استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 48^{2010} و 48^{2011} على7:

لدينا: $6\times 7=6-48$ ومنه $48\equiv 6[7]$.

من جهة أخرى $48\equiv -1[7]$ لأن $6\equiv -1[7]$

وعليه: $48^{2010}\equiv(-1)^{2010}[7]$ أي $48^{2010}\equiv 1[7]$

ومنه باقي قسمة 48^{2010} على 7 هو1

ولدينا أيضا: $48^{2011}\equiv(-1)^{2011}[7]$ أي $48^{2011}\equiv -1[7]$

وبما أن $-1\equiv 6[7]$ فإن باقي قسمة 48^{2011} على 7 هو6 .

التمرين الثاني (08 نقط)

أ-1) تشكيل جدول تغيرات الدالة g بقراءة بيانية

من البيان (C_g) في الشكل المقابل نشكل الجدول التالي

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	
g(x)	$-\infty$ ↗		4	↘ $-\infty$	

2)تعيين إشارة g(x) حسب قيم x بقراءة بيانية

من البيان لدينا:

$g(x)\prec 0$ معناه $x\in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$

لأن (C_g) تحت حامل محور الفواصل

$g(x)\geq 0$ معناه $x\in[-1;3]$

لأن (C_g) فوق حامل محور الفواصل

ب-1)بيان أنّ $f'(x)=-g(x)$ واستنتاج إشارة f'(x)

لدينا: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3$ و منه

$f'(x)=\frac{1}{3}(3x^2)-2x-3=x^2-2x-3$

$=-(-x^2+2x+3)=-g(x)$

بما أن : $f'(x)=-g(x)$

فإن إشارة f'(x) هي عكس إشارة g(x)

وعليه: $f'(x)\succ 0$ معناه $x\in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$

$f'(x)\leq 0$ معناه $x\in[-1;3]$

2)حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{3}x^3) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{3}x^3) = -\infty$

3)حساب $f(-1)$ و $f(3)$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f

لدينا: $f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+3=-\frac{1}{3}+5=\frac{14}{3}$

$f(3)=\frac{1}{3}(3)^3-(3)^2-3(3)+3=-6$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{14}{3}$	↘	-6	↗	$+\infty$

4) بيان وجود مماسيْن لـ (C_f) معامل توجيه كل منهما 5

(C_f) يقبل مماسيْن معامل توجيه كل منهما5 معناه

المعادلة $f'(x)=5$ تقبل حليْن مختلفيْن

$f'(x)=5$ معناه $-g(x)=5$

معناه $x^2-2x-3=5$

معناه $x^2-2x-8=0$ معناه $x=-2$ أو $x=4$

الخلاصة: (C_f) يقبل مماسيْن معامل توجيه كل منهما 5.

5)حل المعادلة $f(x)=g(x)$ واستنتاج نقط تقاطع (C_g) و (C_f)

$f(x)=g(x)$ معناه $\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3=-x^2+2x+3$

$\frac{1}{3}x^3-5x=0$ معناه $x(\frac{1}{3}x^2-5)=0$

معناه $x=0$ أو $x^2-15=0$

معناه $x=0$ أو $x=\sqrt{15}$ أو $x=-\sqrt{15}$

المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل ثلاثة حلول و منه المنحنيان (C_g) و (C_f) يتقاطعان في ثلاث نقط مختلفة إحداثياتها هي:

$(0;3)$ ، $(\sqrt{15};-12+2\sqrt{15})$ و $(-\sqrt{15};-12-2\sqrt{15})$

<u>التمرين الثالث</u> (06 نقط)

تحديدالإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث مع التعليل

الاقتراح	الإجابة ص	التعليل
1	حسابية	$u_{n+1}-u_n=-2n-2+2n=-2$
2	-88	$u_{44}=-2(44)=-88$
3	$-n^2-n$	$u_0+u_1+...+u_n=\frac{(n+1)(0-2n)}{2}$ $=-n^2-n$
4	$\frac{1}{9}$	$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{3^{-2n-2}}{3^{-2n}}=\frac{3^{-2n}.3^{-2}}{3^{-2n}}=\frac{1}{9}$
5	متناقصة	$v_{n+1}-v_n=3^{-2n-2}-3^{-2n}$ $=\frac{3^{-2n}(-8)}{9}\prec 0$

إعداد الأستاذ: بالعبيدي م العربي+محمد جبالي :