دليل الهندسة في الفضاء (الهندسة التحليلية)

في كل ما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

أولا " مفاهيم أولية "

نعتبر النقطتين : $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ والشعاعان : $\vec{U}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$

1°) مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{pmatrix}$

2°) الطول (المسافة) بين النقطتين A و B هو: $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$

3°) إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $\left[AB\right]$ هي : $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

4°) الجداء السلمي لشعاعان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ هو : $\vec{U}\bullet\vec{V}=\alpha\times\alpha'+\beta\times\beta'+\gamma\times\gamma'$

5°) تعامد الشعاعان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ يعني : $\vec{U}\perp\vec{V}\Rightarrow\vec{U}\bullet\vec{V}=\alpha\times\alpha'+\beta\times\beta'+\gamma\times\gamma'=0$

6°) توازي الشعاعان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ يعني $\vec{U}$ و $\vec{V}$ مرتبطين خطياً(أي إثبات وجود عدد حقيقي t يحقق : $\vec{U}=t\vec{V}$)

<u>معناه</u> : يكفي أن نثبت أن التناسب التالي : $\left[\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=t\in\mathbb{R}\right]$ محقق

7°) جيب تمام (COS) زاوية شعاعيّة : حيث : $\vec{U}\neq\vec{0}$ و $\vec{V}\neq\vec{0}$

$$COS\left(\vec{U};\vec{V}\right)=\frac{\vec{U}\bullet\vec{V}}{\left\|\vec{U}\right\|\times\left\|\vec{V}\right\|}=\frac{\alpha\times\alpha'+\beta\times\beta'+\gamma\times\gamma'}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\times\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}$$

ثانيا " المستقيم في الفضاء"

1°) التمثيل الوسيطي لمستقيم (يشمل نقطة ويوازي شعاع)

المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ ويوازي الشعاع $\vec{U}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

لتكن: $M(x,y,z)\in(\Delta)$ يعني : $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{U}$ أي : $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{U}$ (حيث : t من $\mathbb{R}$)

ومنه (Δ) له تمثيل وسيطي من الشكل : $(\Delta):\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ z = \gamma t + z_A \end{cases} \left(t\in\mathbb{R}\right)$ [$\vec{U}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)]

2°) التمثيل الوسيطي لمستقيم (يشمل نقطتين)

المستقيم (AB) الذي يشمل النقطتين $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$

لتكن: $M(x,y,z)\in(AB)$ يعني : $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$ أي : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ (حيث : t من $\mathbb{R}$)

ومنه (AB) له تمثيل وسيطي من الشكل : $\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \\ z = (z_B - z_A)t + z_A \end{cases}$ [$\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB)]

3°) مستقيمات خاصة

- حامل محور الفواصل $(o;\vec{i})$ يعرف بالجملة : $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- حامل محور التراتيب $(o;\vec{j})$ يعرف بالجملة : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- حامل محور الرواقم $(o;\vec{k})$ يعرف بالجملة : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

4°) المسقط العمودي لنقطة على مستقيم

لتكن النقطة $H(x,y,z)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) .

الذي تمثيله الوسيطي $(\Delta):\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \left(t\in\mathbb{R}\right)$ ، لتعيين إحداثيات النقطة H :

❖ نبحث عن قيمة الوسيط t وذلك عن طريق :

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{U} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \bullet \vec{U} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha t + x_0 - x_A \\ \beta t + y_0 - y_A \\ \gamma t + z_0 - z_A \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

❖ نعوض عن t في إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) ، فنجد إحداثيات المسقط العمودي H

5°) بعد نقطة عن مستقيم

لحساب بُعد نقطة A عن المستقيم (Δ)، نعيّن مسقطها العمودي H على هذا المستقيم ويكون بُعد النقطة عن المستقيم (Δ) هو الطول AH أي : $d\left(A;(\Delta)\right) = AH = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\left(x_H - x_A\right)^2 + \left(y_H - y_A\right)^2 + \left(z_H - z_A\right)^2}$

6°) تعامد مستقيمين في الفضاء

يتعامد مستقيمان في الفضاء اذا تعامد شعاعا توجيههما بمعنى:

• **اذا كان :** (Δ) و (Δ') مستقيمين شعاعي توجيههما على الترتيب : $\overrightarrow{U_{(\Delta)}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{U_{(\Delta')}}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

فلدينا: $(\Delta) \perp (\Delta') \Rightarrow \overrightarrow{U_{(\Delta)}} \bullet \overrightarrow{U_{(\Delta')}} = 0 \Rightarrow \alpha \times \alpha' + \beta \times \beta' + \gamma \times \gamma' = 0$

7°) الوضعية النسبية لمستقيمين في الفضاء

ليكن (Δ) و (Δ') مستقيمين شعاعي توجيههما على الترتيب : $\overrightarrow{U_{(\Delta)}}$ و $\overrightarrow{U_{(\Delta')}}$

❖ إذا كان $\overrightarrow{U_{(\Delta)}} \parallel \overrightarrow{U_{(\Delta')}}$ (مرتبطان خطياً) فان : المستقيمان (Δ) و (Δ') متوازيان

(متوازيا تماماً أو **منطبقان)**

• **توضيح :** نعين نقطة A من المستقيم (Δ)

أ/ إذا كانت A تنتمي كذلك إلى المستقيم (Δ') فان (Δ) و (Δ') **منطبقان**

ب/ إذا كانت A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ') فان (Δ) و (Δ') **متوازيا تماماً (منفصلان)**

❖ إذا كان $\overrightarrow{U_{(\Delta)}} \not\parallel \overrightarrow{U_{(\Delta')}}$ (غير مرتبطان خطياً) فان : المستقيمان (Δ) و (Δ') غير متوازيان

(متقاطعان في نقطة أو من **مستويين مختلفين :" ليسا من نفس المستوي ")**

ثالثا "المستوي في الفضاء"

1°) المعادلة الديكارتية لمستوٍ

كل مستوٍ في الفضاء له معادلة ديكارتية من الشكل : $ax+by+cz+d=0$

حيث : a ، b و c لا تنعدم في آن واحد ، علماً أن : $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ هو الشعاع الناظمي له (عمودياً عليه)

2°) تعيين معادلة ديكارتية لمستوٍ معين بثلاث نقط (يشمل ثلاث نقط)

أ/ لإثبات أن النقط : A ، B و C تعرف (تُعين – تُشكل) مستوٍ:

- ❖ يعني النقط : A ، B و C ليست في إستقامية
- ❖ يعني الشعاعان: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً (غير متوازيين)

ب/ لإيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

- ❖ نبحث عن شعاعاً ناظمياً $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ له وذلك بحل الجملة التالية $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

ثم نطبق التعريف التحليلي للجداء السلمي فنجد عادة جملة ثلاث مجاهيل بمعادلتين فقط ممّا يجعلنا مثلا نثبت a ونبحث عن b و c بدلالة a فنجد الشعاع الناظمي العام $\vec{n_a}$ ونختار قيمة مبسطة لـــــ : a وعليه نجد الشعاع الناظمي الخاص $\vec{n}$

- ❖ بعد إيجاد a ، b و c أعداد معلومة يبقى d مجهول فعلينا أن نعوض إحداثيات احد النقط: A أو B أو C في المعادلة : $ax+by+cz+d=0$ فنجد قيمة d

- **تنبيه:** إذا أعطيت المعادلة الديكارتية للمستوي وطلب منا التأكد من أنها للمستوي (ABC) يكفي أن نبين :

أ/ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

ب/ وإحداثيات كل من النقط الثلاث A ، B و C تحقق المعادلة : $ax+by+cz+d=0$

بمعنى : $\begin{cases}A\in(ABC)\\B\in(ABC)\\C\in(ABC)\end{cases}$

3°) مستويات خاصة:

- ❖ $x=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(o;\vec{j};\vec{k}\right)$
- ❖ $y=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(o;\vec{i};\vec{k}\right)$
- ❖ $z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

4°) بعد نقطة عن مستوٍ

بعد النقطة $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ عن المستوي : $(P): ax+by+cz+d=0$ تعطى بالقانون التالي:

$$d\left(A;(P)\right)=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

5°) التمثيل الوسيطي لمستوٍ معين بثلاث نقط (يشمل ثلاث نقط):

لإيجاد التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC) حيث: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

$M\left(x,y,z\right)\in(ABC)$ يعني : $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+t'\overrightarrow{AC}$ (حيث : t و t' من $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x=\left(x_B-x_A\right)t+\left(x_C-x_A\right)t'+x_A \\ y=\left(y_B-y_A\right)t+\left(y_C-y_A\right)t'+y_A \\ z=\left(z_B-z_A\right)t+\left(z_C-z_A\right)t'+z_A \end{cases}$$ يعني :

6°) تعامد مستويين

يتعامد مستويان في الفضاء اذا تعامد شعاعهما الناظميّان:

إذا كان : $\begin{cases}(P_1): ax+by+cz+d=0\\(P_2): a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$ فلدينا : $(P_1)\perp(P_2)$ يعني : $\overrightarrow{n_{(P_1)}}\perp\overrightarrow{n_{(P_2)}}$

أي : $\overrightarrow{n_{(P_1)}}\bullet\overrightarrow{n_{(P_2)}}=a\times a'+b\times b'+c\times c'=0$

7°) المسقط العمودي لنقطة على مستوي:

لتكن النقطة $H\left(x,y,z\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ،لتعيين إحداثيات النقطة H :

أ/ نبحث عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH) الذي يشمل النقطة A وعمودي على المستوي في النقطة H

أي : " $\overrightarrow{AH}\parallel\overrightarrow{n_{(P)}}$ يعني $\overrightarrow{AH}=t\ \overrightarrow{n_{(P)}}$ "

ب/ نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH) في معادلة المستوي (P) فنجد قيمة t ونعوض عن t في التمثيل الوسيطي فنجد إحداثيات المسقط العمودي H

8°) الوضعية النسبية لمستويين في الفضاء:

نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي: $\begin{cases}(P_1): ax+by+cz+d=0\\(P_2): a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$

- ❖ إذا كان : $\left[\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}\right]$ فان : المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان بالتطابق (**منطبقان**)
- ❖ إذا كان : $\left[\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}\right]$ فان : المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان تماماً (**منفصلان**)
- ❖ إذا كان **التناسب التالي** : $\left[\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\right]$ **غير محقق** فان : المستويين (P_1) و (P_2) غير متوازيان (**متقاطعان**)

- **ملحوظة:**

▪ **المسألة :** للبحث عن المستقيم (Δ) ناتج تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) أي : $(P_1)\cap(P_2)=(\Delta)$

نضع في الحالة العامة : $z=t$ ونبحث عن x و y بدلالة t فنجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

من الشكل : $(t\in\mathbb{R})$ $(\Delta):\begin{cases}x=\alpha t+x_0\\y=\beta t+y_0\\z=t\end{cases}$

▪ **المسألة العكسية:** عندما يكون لدينا التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) ، لكي نبين أن (Δ) هو مستقيم تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) ، يكفي أن نتحقق : $\begin{cases}(\Delta)\subset(P_1)\\(\Delta)\subset(P_2)\end{cases}$ بمعنى إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) تحقق معادلة كلاً من المستويين (P_1) و (P_2)

9°) كيفية تعيين تقاطع ثلاث مستويات

- ❖ **الحالة (1) :** اذا كان مستويان منهم متوازيان تماما فان تقاطع المستويات الثلاثة **خال**

بمعنى : $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\{\varnothing\}$

- ❖ **الحالة (2) :** اذا كان مستويين منهم غير متوازيين (**متقاطعين**) نعين مستقيم تقاطعهما (Δ) فيصبح تقاطع المستويات الثلاثة عبارة عن تقاطع مستقيم مع مستوي

بمعنى : مثلا $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=(\Delta)\cap(P_3)$

10°) <u>تعامد مستقيم ومستوي في الفضاء</u>

يتعامد مستقيم ومستوي في الفضاء اذا **توازى** شعاع توجيه هذا المستقيم مع الشعاع الناظمي لهذا المستوي

بمعنى إذا كان : $\overrightarrow{U_{(\Delta)}}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (Δ) و $\overrightarrow{n_{(P)}}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

فان : $(\Delta)\perp(P)\Rightarrow \overrightarrow{U_{(\Delta)}}\parallel\overrightarrow{n_{(P)}}\Rightarrow\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}$

11°) <u>الوضع النسبي لمستقيم ومستوي في الفضاء</u>

- ❖ $(\Delta)\cap(P)=(\Delta)$ يعني : $(\Delta)\subset(P)$ " (Δ) مرسوم في هذا المستوي "
- ❖ $(\Delta)\cap(P)=\{\varnothing\}$ يعني (P) و (Δ) متوازيان تماماً (**منفصلان**)
- ❖ $(\Delta)\cap(P)=\{F\}$

لإيجاد إحداثيات F نقطة تقاطع (P) و(Δ)، نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة المستوي(P) فنجد قيمة t ونعوض عن t في التمثيل الوسيطي فنجد إحداثيات F

رابعاً "سطح الكرة في الفضاء"

1°) <u>معادلة سطح الكرة</u>: معادلة سطح الكرة (S) ذات المركز: $\omega(x_\omega,y_\omega,z_\omega)$ ونصف قطرها R تعطى بالقانون

$$(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2=R^2$$

2°) <u>المسألة العكسية</u>: لتكن (E): مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

لمعرفة طبيعة مجموعة النقط (E) يمكن أن نستعمل إحدى الطريقتين الآتيتين :

- ❖ **<u>الطريقة الأولى</u> : (طريقة حساب العدد K)**، نحسب : $K=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$ نميز ثلاث حالات
  - **إذا كان :** $K<0$ **فان :** $(E)=\varnothing$
  - **إذا كان :** $K=0$ **فان :** $(E)=\left\{\omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$
  - **إذا كان:** $K>0$ **فان:** (E) سطح كرة (S) **حيث :** $(E)=(S)=\left\{\omega(x_\omega,y_\omega,z_\omega)\ ;\ R=\sqrt{K}\right\}$

❖ **<u>الطريقة الثانية</u>: (طريقة استعمال قاعدة إكمال التربيع)**

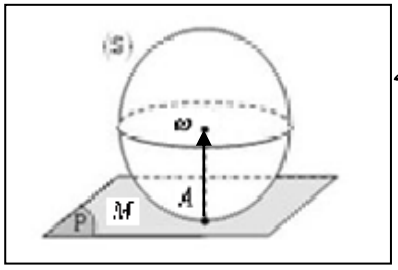
$$\begin{cases} x^2+ax=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \\ y^2+by=\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \\ z^2+cz=\left(z+\dfrac{c}{2}\right)^2-\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 \end{cases}$$ **نستخدم فيهـــا :**

▪ **نصيحة:** إذا اشتملت المعادلة المعطاة لمجموعة النقط (E) على وسيط يفضل استخدام طريقة حساب العدد K أمّا إذا لم تشتمل المعادلة على وسيط فنفضل استخدام طريقة قاعدة إكمال التربيع

3°) <u>كيفية تعيين معادلة مستو يمس سطح كرة في نقطة معلومة</u>

لإيجاد معادلة المستوي (P) الذي يمس سطح الكرة (S) في النقطة A نستعمل إحدى الطريقتين

❖ **<u>الطريقة الأولى</u> :** $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{\omega A}\Rightarrow\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{\omega A}=0$

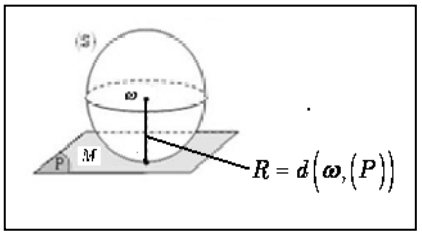


❖ **<u>الطريقة الثانية</u> :** نلاحظ ان $\overrightarrow{\omega A}$ شعاع ناظمي للمستوي (لأنه عمودي عليه ثم نعوض احداثيات النقطة A في معادلة المستوي ، فنجد الثابت d

4°) <u>كيفية تعيين معادلة سطح كرة التي تمس مستوٍ معلوم</u>

(S) سطح كرة مركزها : $\omega\left(x_\omega,y_\omega,z_\omega\right)$ معطى ، و (P) مستوٍ معادلته : $ax+by+cz+d=0$

- **طريقة ايجاد معادلة سطح الكرة (S) :**

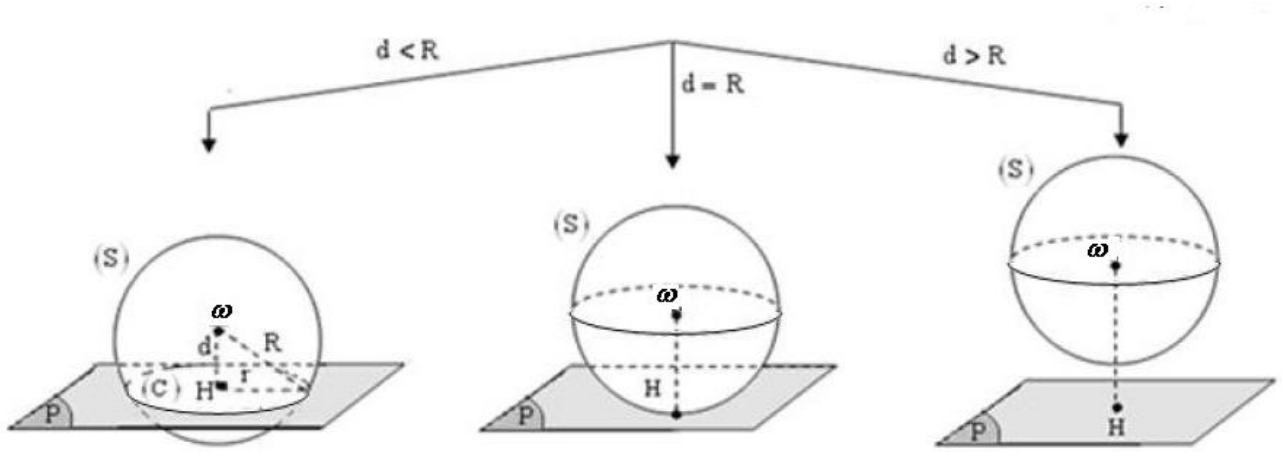


كما يلي :
$$\begin{cases} (S):\left(x-x_\omega\right)^2+\left(y-y_\omega\right)^2+\left(z-z_\omega\right)^2=R^2 \\ R=d\left(\omega;(P)\right)=\dfrac{\left|ax_\omega+by_\omega+cz_\omega+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

5°) الوضعية النسبية لسطح كرة مع مستوٍ في الفضاء (مع ذكر العناصر المميزة)

(S) سطح كرة مركزها : $\omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega)$ ، ونصف قطرها R ، و (P) مستوٍ معادلته : $ax+by+cz+d=0$

نضع : $d = d(\omega,(P))$ **فلدينا:**



اذا كان : $d(\omega,(P)) > R$

فان : $(S)\cap(P)=\varnothing$

اذا كان : $d(\omega,(P)) = R$

فان : $(S)\cap(P)=\{H\}$

المستوي (P) **يمس سطح الكرة** (S) **في النقطة** H ،

حيث H **المسقط العمودي للنقطة** ω **على المستوي** (P)

اذا كان : $d(\omega,(P)) < R$

فان $(S)\cap(P)=C(H;r)$

المستوي (P) **يقطع سطح الكرة** (S) **وفق دائرة** (C) **مركزها** H **ونصف قطرها** r ،

حيث H **المسقط العمودي للنقطة** ω **على المستوي** (P)

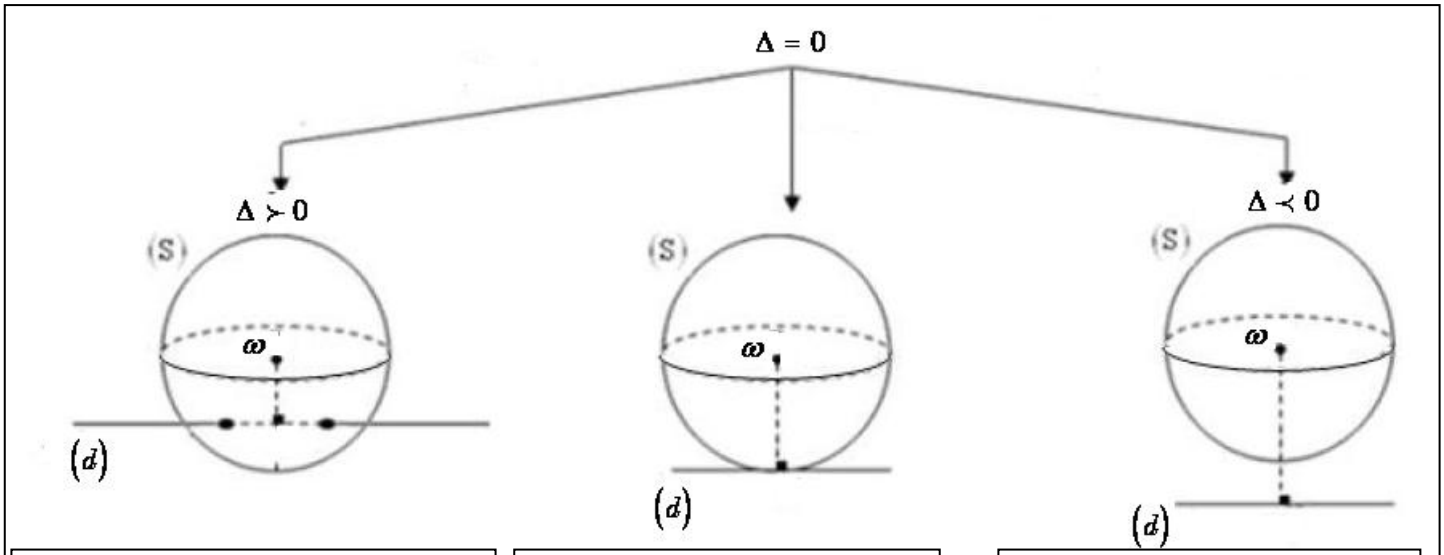
و $r=\sqrt{R^2-d^2}$

6°) الوضعية النسبية لسطح كرة مع مستقيمٍ في الفضاء

(S) سطح كرة مركزها معادلتها: $(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2=R^2$

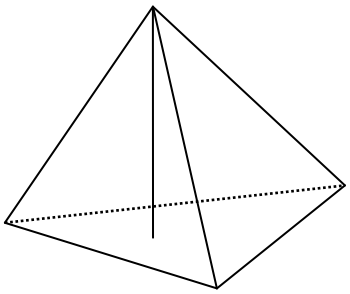
و (d) مستقيم الذي تمثيله الوسيطي $(d):\begin{cases}x=\alpha t+x_0\\ y=\beta t+y_0\\ z=\gamma t+z_0\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

لدراسة الوضعية النسبية لسطح كرة (S) مع المستقيم (d) في الفضاء ، نعوض x ، y و z من التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) في معادلة (S)، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها الوسيط t



$\Delta\prec 0\Rightarrow (S)\cap(d)=\varnothing$	$\Delta=0\Rightarrow (S)\cap(d)=\{H\}$ **حيث H نقطة تماس بين (S) و(d) نجد احداثياتها بتعويض قيمة الحل المضاعف t في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d)**	$\Delta\succ 0\Rightarrow (S)\cap(d)=\{H;H'\}$ **حيث H و H' نقطتي تقاطع (S) مع (d) نجد احداثياتهما بتعويض كل من قيمة t_1 و t_2 في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d)**

▪ 7°) حجم رباعي الوجوه



يحسب الحجم V لرباعي الوجوه بالقانون التالي: $V=\dfrac{S\times h}{3}$

حيث S مساحة القاعدة و h الارتفاع

خامسًا "المرّجح في الفضاء"

▪ **ملاحظة:** في حالة مرّجح أكثر من ثلاث نقط تعمم النتائج بأكملها بنفس الكيفية التي عُرف بها مرّجح ثلاث نقط

1°) لاحقة النقطة G مرّجح الجملة المثقلة : $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ **تعطى بالعلاقة:**

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

2°) كيفية تحويل العلاقة الشعاعية من الشكل: $\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\gamma\overrightarrow{CM}$ **علمًا أن:** $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

بإدخال نقطة المرّجح G نجد : $\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\gamma\overrightarrow{CM}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

• **التعميم :** $\overrightarrow{\text{المرّجح M}}$ ×(مجموع المعاملات)

▪ **ملاحظة:** إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ فلا يوجد مرّجح للنقط A ، B و C ويكون الشعاع:

$\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\gamma\overrightarrow{CM}$ شعاعا ثابتًا مستقلا عن النقطة M ويتم تحويل العبارة بإدخال إحدى النقط المعلومة واستعمال علاقة شال **Chasles**

3°) كيفية تحويل العلاقة العددية من الشكل $\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2$ **:**

بإدخال نقطة المرّجح G نجد $\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$

• **التعميم:** اجعل مكان M نقطة المرّجح + [المرّجح M]^2 ×(مجموع المعاملات)

4°) لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC تعطى بالعلاقة:

$$H\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

سادسًا "مجموعة النقط M من الفضاء"

شكل المعادلة المحصل عليها من مجموعة النقط M من الفضاء	طبيعة (نوع E) مجموعة النقط M من الفضاء
1°) $MG = K > 0$	(E): سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R = K$
2°) $\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{MH} = 0$	(E): سطح الكرة التي قطرها $[GH]$ مركزها ω منتصف القطعة المستقيمة $[GH]$ ونصف قطرها $R = \frac{GH}{2}$
3°) $\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$	(E): المستوي الذي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له (عمودي عليه)
4°) $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MH}$	(E): المستوي المحوري على منتصف القطعة المستقيمة $[GH]$

بكالوريات جزائرية

BAC: 2008-2014

إعداد الأستاذ محمد حافظ

التمرين الأول : بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2008

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته : $x+2y-z+7=0$ و النقط $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ و $C(-1;-2;2)$

1- تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي هي : $y+2z-2=0$

2- أ- تحقق ان المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC)

ب- احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

3- لتكن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;\alpha),(C;\beta)\}$ حيث α و β عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$ ، عيّن α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ)

التمرين الثاني: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2008

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك .نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

$A(1;3;-1)$ ، $B(4;1;0)$ ، $C(-2;0;-2)$ ، $D(3;2;1)$

و المستوي (P) الذي معادلته : $x-3z-4=0$.

1) المستوي (P) هو : ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD)

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :

ج1) $\overrightarrow{n_1}(1;2;1)$ ، ج2) $\overrightarrow{n_2}(-2;0;6)$ ، ج3) $\overrightarrow{n_3}(2;0;-1)$

3) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي: ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين الثالث :بكالوريا شعبة تقني رياضي 2008

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$A(1;2;2)$ ، $B(3;2;1)$ ، $C(1;3;3)$ نقط من هذا الفضاء.

1/ برهن أن النقط A ، B و C تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية .

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$(P_1):x-2y+2z-1=0$ و $(P_2):x-3y+2z+2=0$

بيّن أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

3/ بيّن أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

4/ بيّن أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$ هو احد أشعة توجيه المستقيم (Δ).

5/ استنتج أن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو الجملة : $\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases}$; $(k\in\mathbb{R})$

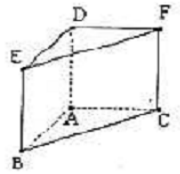
6/ لتكن M نقطة من المستقيم (Δ)

أ- اوجد قيمة k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}(2;0;-1)$ متعامدان

ب-استنتج المسافة بين النقطة $A(1;2;2)$ و المستقيم (Δ)

التمرين الرابع :بكالوريا شعبة تقني رياضي 2008

$ABCDEF$ موشور قائم قاعدته المثلث ABC القائم في A و المتساوي الساقين وجهاه $ABED$ و $ACFD$ مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما r حيث $\left(r\in\mathbb{R}_+^*\right)$. (انظر الشكل)



1) يرمز I إلى منتصف $[AD]$ و J إلى مركز ثقل الرباعي $BCFE$.
بيّن أن G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;1),(D;2),(E;1),(F;1)\}$ هو منتصف $[IJ]$.

2) ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.

- عيّن إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F
- عيّن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$2MA^2+MB^2+MC^2+2\,\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=10\,\overrightarrow{r}$$

التمرين الخامس :بكالوريا شعبة رياضيات 2008

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
لتكن النقط $A(0;2;1)$ ، $B(-1;1;-3)$ ، $C(1;0;-1)$

1.اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A

2.ليكن المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases}x=-1-\lambda\\y=1+2\lambda\\z=-3+2\lambda\end{cases}$ حيث λ عدد حقيقي .

أ) اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C و يعامد المستقيم (D)

ب) احسب المسافة بين النقطة C و المستقيم (D)

ج) ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) وسطح الكرة S

التمرين السادس: بكالوريا شعبة رياضيات 2008

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفيين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$\begin{cases}x=3+\lambda\\y=2+\frac{1}{2}\lambda\\z=-2-2\lambda\end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad \begin{cases}x=6+\alpha\\y=1-2\alpha\\z=5+\alpha\end{cases};\ \alpha\in\mathbb{R} \quad \text{على الترتيب}$$

1- بيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

2- M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ')

أ) عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') . ب) احسب الطول MN .

3-عيّن معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .

4-احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ماذا تلاحظ ؟

التمرين السابع: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2009

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;3)$

1) (P) مستو معادلة له من الشكل $x-z+1=0$

أ) بيّن أن المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

ب) ما طبيعة المثلث (ABC)

2) أ) تحقق من أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى (ABC) .

ب) ما طبيعة $ABCD$

3) أ) احسب المسافة بين D و المستوي (ABC) .

ب) احسب حجم $ABCD$

التمرين الثامن بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2009

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.نعتبر النقط :

$A(2;3;-1)$ ، $B(1;-2;4)$ ، $C(3;0;-2)$ ، $D(1;-1;-2)$

وليكن (π) المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$

المطلوب :أجب بصحيح او خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

1.النقط A ، B و C في استقامية .

2.(ABD) مستوي معادلة ديكارتية له : $25x-6y-z-33=0$

3.المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π).

4.المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة : $H(1;1;-1)$

التمرين التاسع: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2009

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

(Δ) مستقيم من الفضاء تمثيله الوسيطي معطى بالجملة التالية : $t\in\mathbb{R}$; $\begin{cases}x=2t-1\\y=-t+2\\z=t+1\end{cases}$

P مستو معرف بالمعادلة $x+3y+z+1=0$

عيّن في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح أو الاقتراحات الصحيحة مع التعليل

1	A_1 : النقطة $A(1;1;2)$ تنتمي إلى (Δ)	B_1 : النقطة $B(-1;0;2)$ تنتمي إلى (Δ)	C_1 : النقطة $C\left(0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ تنتمي إلى (Δ)
2	A_2: $\vec{u}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)$ شعاع توجيه (Δ)	B_2 : $\overrightarrow{u'}(1;3;1)$ شعاع توجيه (Δ)	C_2: $\overrightarrow{u''}(3;1;0)$ شعاع توجيه (Δ)
3	A_3 : (Δ) محتوى في P	B_3 : (Δ) يقطع P	C_3 : (Δ) يوازي P
4	A_4 :المستوي Q_1 ذو المعادلة $x+3y+z-3=0$ يعامد P	B_4 :المستوي Q_2 ذو المعادلة $2x-y+\frac{1}{2}z=0$ يعامد P	C_4 :المستوي Q_3 ذو المعادلة : $x-y+2z+5=0$ يعامد P
5	A_5 :المسافة بين النقطة $D(1;1;1)$ و المستوي P هي $\frac{6}{\sqrt{11}}$	B_5 :المسافة بين النقطة $O(0;0;0)$ و المستوي P هي : $\frac{\sqrt{11}}{11}$	C_5 :المسافة بين النقطة $E(1;3;0)$ و المستوي P هي : $\sqrt{11}$

التمرين العاشر: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2009

1. نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

النقط : $A(1;1;2)$ ، $B(-1;0;-2)$ ، $C(-1;0;-6)$

بيّن أن مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB) نرمز له بالرمز P يطلب تعيين معادلة له .

2 . لتكن S مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

برهن أن S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R

3. G نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أ) عيّن إحداثيات G ثم تأكد أنها تنتمي إلى S

ب) اكتب معادلة المستوي Q الذي يمس سطح الكرة S في النقطة G

التمرين الحادي عشر: بكالوريا شعبة رياضيات 2009

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(2;1;2)$ و $B(0;2;-1)$ و المستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$$ حيث $t\in\mathbb{R}$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

اثبت أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

2) نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (AB) و يوازي المستقيم (D) .

أ- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ عمودي على المستوي (P)

ب-اكتب معادلة للمستوي (P)

ج- بيّن أن المسافة بين نقطة M من (D) و المستوي (P) مستقلة عن موضع M.

د- عيّن تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (yoz).

التمرين الثاني عشر: بكالوريا شعبة رياضيات 2009

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

المستويين (P_1) و (P_2) حيث : $x+2y-z-2=0$ معادلـة للمستوي (P_1)

و $\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ تمثيل وسيطي للمستوي (P_2) .

1) اكتب معادلة للمستوي (P_2)

2) عيّن شعاعا ناظميا $\overrightarrow{n_1}$ للمستوي (P_1) و شعاعا ناظميا $\overrightarrow{n_2}$ للمستوي (P_2) .

3) بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان .

4) أ- $A(3;1;1)$ نقطة من الفضاء ، عيّن المسافة d_1 بين النقطة A و المستوي (P_1) ثمّ المسافة d_2 بين A و المستوي (P_1) .

ت-استنتج المسافة d_3 بين النقطة A و المستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .

5) أ- عيّن تمثيلا وسيطيا بدلالة λ للمستقيم (Δ) حيث λ عدد حقيقي .

ب- M نقطة كيفية من (Δ)، احسب MA^2 بدلالة λ مستنتجا ثانية المسافة بين A و (Δ) .

التمرين الثالث عشر: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2010

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;1;1)$ و $C(-1;2;-1)$.

1) أ) بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

ب) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x+y-z-2=0$.

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب :

$(P): x+2y-3z+1=0$ و $(Q): 2x+y-z-1=0$

و المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له .

أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

ب) تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) .

3) عين تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q) .

التمرين الرابع عشر: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2010

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر المستوي $(\mathcal{P})$ الذي معادلته : $x-2y+z+3=0$

1) نذكر أن حامل محور الفواصل $(O;\vec{i})$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

- عيّن إحداثيات A نقطة تقاطع حامل محور الفواصل $(O;\vec{i})$ مع المستوي $(\mathcal{P})$.

2) B و C النقطتان من الفضاء حيث : $B(0;0;-3)$ و $C(-1;-4;2)$

أ- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي $(\mathcal{P})$. ب- أحسب الطول AB.

جـ - احسب المسافة بين النقطة C و المستوي $(\mathcal{P})$.

3) أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المارّ بالنقطة C و و العمودي على المستوي $(\mathcal{P})$.

ب- تحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ)

جـ - احسب مساحة المثلث ABC

التمرين الخامس عشر: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2010

الفضاء مزوّد بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النّقطتين $A(3;-1;2)$ و $B(1;2;1)$ و المستوي (P) الذي معادلته $x-2y+3z-7=0$

1/ عيّن إحداثيات النقطة G مرجح النّقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و 1 على الترتيب .

2/ عيّن طبيعة و عناصر (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=4$.

3/ أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G و يعامد المستوي (P) .

ب- عيّن إحداثيات H نقطة تقاطع (P) و (Δ) .

جـ - احسب المسافة بين G و المستوي (P) .

4/ نعرّف المستوي (P') بتمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=1+t \\ y=t+2\lambda \\ z=2-t+2\lambda \end{cases}$ حيث t و λ عددان حقيقيان

- أثبت أن (P) و (P') متقاطعان و اكتب تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما

التمرين السادس عشر: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2010

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقطتين : $A(3;-2;2)$ و $B(0;4;-1)$.

1) اكتب معادلة للمستوي (p_1) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1;0;-1)$ شعاع ناظمي له .

2) (p_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) و يعامد المستوي (p_1).

أ- بيّن أن $\vec{v}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (p_2) .

ب-اكتب معادلة لـ (p_2) .

3) نعتبر النقطتين C و D حيث $C(6;1;5)$ و D معرفة بـ : $\overrightarrow{CD}(0;-3;-6)$.

أ- بيّن أن المثلث ACD قائم في A و احسب مساحته .

ب- بيّن أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD).

جـ - احسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

التمرين السابع عشر: بكالوريا شعبة رياضيات 2010

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;0;0)$ و $B(0;1;0)$ و $C(0;0;2)$.

1) بيّن أن النقط A و B و C ليست في إستقامية .

2) جد معادلة للمستوي (ABC) .

3) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) .

4) (P) المستوي الذي معادلته : $2x+2y+z-2=0$

أ) بيّن أن : (P) و (ABC) متقاطعان .

ب) بيّن أن : (P) يشمل B و C ، ماذا تستنتج ؟

5) عيّن (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

التمرين الثامن عشر: بكالوريا شعبة رياضيات 2010

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-1;2;1)$ و $B(2;1;3)$ و $C(0;-1;2)$ ، ولتكن (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $AM=BM$

1- بيّن أنّ (P) هو المستوي الذي معادلته : $3x-y+2z-4=0$

2- عيّن معادلة للمستوي (Q) الذي يشمل A و يوازي (P).

3- أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل C و يعامد (P)

ب- عيّن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D) .

ج- احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (D)

4- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (π) الذي يحوي المستقيم (AC) و يعامد المستوي (P) ثم استنتج معادلة له .

التمرين التاسع عشر: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2011

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
المستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له ؛ وليكن $(\mathcal{Q})$ المستوي ذا المعادلة : $x+2y-7=0$

1. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.

2. أ- تحقّق أن النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$

ب-بيّن أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطيّ له .

3. لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ- احسب المسافة بين النقطة C و المستوي $(\mathcal{P})$ ثمّ المسافة بين النقطة C و المستوي $(\mathcal{Q})$.

ب- أثبت أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$متعامدان .

جـ- استنتج المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ)

التمرين العشرون: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2011

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط
$A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$.

1. أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له

ب-تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

جـ - بيّن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

د- استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

2. نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث t عدد حقيقي ؛ و لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AM$.

أ- اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t .

ب-بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي t ؛ $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$.

حـ - استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن .

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة h ، و المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ)

التمرين الواحد والعشرون: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2011

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1/ المعادلة: $21x+14y=40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

2/ في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون: $\overline{3421}+\overline{1562}=\overline{5413}$

3/ باقي القسمة الإقليدية للعدد: $1+3+3^2+...+3^{2011}$ على 7 هو: 6

4/ الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

أ- المستوي (ρ) الذي معادلته $2x+y-z+1=0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2;1;-1)$ و $\vec{u}(1;-1;1)$ شعاع توجيهه لا يشتركان في أية نقطة.

ب- معادلة المستوي (Q) الذي يشمل مبدأ المعلم O ويوازي المستوي (ρ) هي: $x-y+z=0$.

التمرين الثاني والعشرون: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2011

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D

حيث : $\overrightarrow{AD}(1;5;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(0;7;3)$ ، $\overrightarrow{CD}(1;-3;7)$ و $C(2;8;-4)$

1/ بيّن أن النقط A ، B ، D تعيّن مستويا .

2/ بيّن أن المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD)

3/ I المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

أ) بيّن أن المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDI)

ب) عيّن معادلة للمستوي (CDI) و اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

جـ) استنتج إحداثيات النقطة I

4/ احسب الأطوال DI ، CD ، AB واستنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$

(حجم رباعي الوجوه = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الإرتفاع)

التمرين الثالث والعشرون: بكالوريا شعبة رياضيات 2011

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1/ نعتبر النقط $A(1;0;2)$ و $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$

أ/ أثبت أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

ب/ بيّن أن الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث :

$(P_1):3x+4y-2z+1=0$ و $(P_2):2x-2y-z-1=0$.

أ/ بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان .

ب/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2).

جـ/ تحقّق أن النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) .

د/ احسب المسافتين $d(O;(P_1))$ و $d(O;(P_2))$ و استنتج المسافة $d(O;(\Delta))$.

التمرين الرابع والعشرون: بكالوريا شعبة رياضيات 2011

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$

(D) المستقيم الذي يشمل النقطة A و شعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C و شعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1- اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي لهما

2- بين أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G ؟

3- عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة له .

4- احسب المسافة بين النقطة O و المستوي (ABC) .

5- H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D) .

أ) جد احداثيات النقطة H .

ب) استنتج المسافة بين النقطة B و المستقيم (D)

التمرين الخامس والعشرون: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2012

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة : $14x+16y+13z-47=0$، و النقط $A(1;-2;5)$ ، $B(2;2;-1)$، $C(-1;3;1)$

1) أ- تحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

ب- بيّن أن المستوي (ABC) هو (P).

2)جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

3) أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب- تحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q).

جـ -احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB) .

التمرين السادس والعشرون: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2012

في الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1;0;1)$، $B(2;1;0)$و $C(1;-1;0)$

1) بيّن أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

2) بيّن أن $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) D و H نقطتان من الفضاء حيث : $D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$

أ- تحقّق أنّ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

ب-بيّن أنّ النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

جـ- استنتج أنّ المستويين (ADH) و(ABC) متعامدان ، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما .

التمرين السابع والعشرون: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2012

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

(P) المستوي الذي يشمل النقطة $A(2;-5;2)$و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له .

(Q) المستوي الذي : $x+2y-2=0$ معادلة له .

1- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2- بيّن أن المستويين (P) و(Q) متعامدان .

3- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و(Q).

4- أ) احسب d_1 المسافة بين النقطة $K(3;3;3)$ و المستوي (P) و d_2 المسافة بين النقطة K و المستوي (Q) .

ب) استنتج المسافة d بين النقطة K و المستقيم (Δ)

5- احسب المسافة d بطريقة ثانية .

التمرين الثامن والعشرون: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2012

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

(P) المستوي الذي : $-4x-3y+1=0$ معادلة ديكارتية له و (D)

المستقيم الذي : $k\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} x=k \\ y=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}k \\ z=\frac{-3}{4}+\frac{3}{4}k \end{cases}$ تمثيل وسيطي لـه .

1- تحقق أن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P)

2- أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1;1;0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له

ب) عيّن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ).

3 - بيّن أنّ : $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ).

4- $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء . أ) احسب المسافة بين النقطة M و كل من (P) و (Q)

ب) أثبت أنّ مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي اتحاد مستويين متعامدين (P_1) و (P_2) يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما .

5- عيّن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:

التمرين التاسع والعشرون: بكالوريا شعبة رياضيات 2012

نعتبر في الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النقط

$A(3;0;0)$ ، $B(0;4;0)$ و $C(2;2;2)$

1) بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية و أن الشعاع $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقط A ، B و C.

3) أ- بيّن أنّ : $6x-8y+7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $AM=BM$

ب- بيّن أن : $2x-4y-4z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P'') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $AM=CM$.

جـ- بيّن أنّ (P') و (P'') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

4) احسب إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين الثلاثون: بكالوريا شعبة رياضيات 2012

نعتبر في الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النقط $A(1;1;1)$ ، $B(1;-1;0)$ و $C(2;0;1)$

1) بيّن أن النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

2) (P_2) المستوي الذي : $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له ..

- بيّن أنّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطي له .

3) بيّن أن النقطة O هي مرجح الجملة : $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$

4) أ- عيّن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$$

ب -احسب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ) .

جـ - ماهي طبيعة المثلث ODE؟ ثم استنتج المسافة بين O و (Δ)

التمرين الواحد والثلاثون: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2013

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط:

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$ و المستوي (P) ذا المعادلة: $2y+z+1=0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases}x=-1\\y=2+\beta\\z=1-2\beta\end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC)، ثمّ تحقّق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

2) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ) احسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب) بيّن أن D نقطة من (P)، و أن المثلث BCD قائم.

4) بيّن أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثمّ احسب حجمه.

التمرين الثاني والثلاثون: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2013

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$. ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

1) أ) احسب إحداثيات النقطة I .

ب) بيّن أنّ: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P)؛ المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

3) أ) جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوى، ثمّ استنتج أن المثلث IEC قائم.

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الثالث والثلاثون: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2013

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(3;-2;-1)$ ، $B(5;-3;2)$ ، $C(2;3;2)$ و $D(1;-5;-2)$.

1) بيّن أنّ النقط A و B و C تعين مستويا؛ نرمز له بالرمز (P).

2) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;1;-1)$ ناظمي للمستوي (P)، ثمّ جد معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و يعامد (P) .

ب) عين إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) .

4) H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB)، و λ العدد الحقيقي حيث: $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

أ) بيّن أنّ : $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

ب) استنتج العدد الحقيقي λ و إحداثيات النقطة H ، ثمّ المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB).

التمرين الرابع والثلاثون: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2013

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطتين $A(2;-5;4)$ و $B(3;-4;6)$ و المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=4+t\end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$.

1- أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النقطتين A و B.

ب) ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (D) .

2- (P) المستوي الذي يشمل (D) و يوازي (Δ) .

- برهن أنّ $\vec{n}(3;1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)، ثمّ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3- M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (D) .

أ) عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (D).

ب) احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) والمستوي (P).

التمرين الخامس والثلاثون: بكالوريا شعبة رياضيات 2013

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0;0;1)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$

والمستوي $(\mathcal{P})$ المعرّف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ ؛ α و β وسيطان حقيقيان.

1. أ - بيّن أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب - تحقّق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له.

2. أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$، ثمّ بيّن أنّ المستويين (ABC) و $(\mathcal{P})$ متعامدان.

ب - بيّن أنّ تقاطع (ABC) و $(\mathcal{P})$ هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t \\ z=-7+5t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

جـ - احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)، والمسافة بين النقطة D والمستوي $(\mathcal{P})$، ثمّ استنتج المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

3. $(\mathcal{Q})$ المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و $(\mathcal{P})$.

أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{Q})$.

ب - بيّن أنّ المستويات الثلاثة (ABC) ، $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$ تتقاطع في نقطة واحدة H ، ثمّ عيّن إحداثيات H.

جـ - احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

التمرين السادس والثلاثون: بكالوريا شعبة رياضيات 2013

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$؛ النقطتين $A(-1;0;2)$ و $B(1;1;1)$

والمستقيم (Δ) المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=2+\alpha \\ y=-2 \\ z=-1-\alpha \end{cases}$ حيث $(\alpha\in\mathbb{R})$.

1. أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

ب - بيّن أنّ المستقيمين (AB) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

2. $(\mathcal{P})$ المستوي الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ).

أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$.

ب - أثبت أنّ $x-y+z-1=0$ ، هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.

3. لتكن N نقطة من المستقيم (Δ) و M نقطة من الفضاء إحداثياتها $(1+2\beta;1+\beta;1-\beta)$ مع $(\beta\in\mathbb{R})$.

أ - بيّن أنّ النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

ب - جد إحداثيات النقطتين M و N حتى تكون M المسقط العمودي للنقطة N على المستوي $(\mathcal{P})$.

جـ - تحقق أن المسافة بين N و $(\mathcal{P})$ هي $\frac{2}{\sqrt{3}}$، ثمّ احسب مساحة المثلث ABN.

التمرين السابع والثلاثون: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2014

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;-1;1)$، $B(-1;2;1)$، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$.

1) أ) تحقق أنّ النقط A، B و C تُعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ) احسب إحداثيات G.

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

بيّن أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ) أثبت أنّ معادلة (Γ) هي : $6x-4y+2z+3=0$.

3) بيّن أنّ المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين الثامن والثلاثون: بكالوريا شعبة علوم تجريبية 2014

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$.

1) أ) برهن أن A، B و C ليست في استقامية .

ب) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

جـ) تحقق أنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرّفين بمعادلتيهما كما يلي:

$(P):x-y-2z+5=0$ و $(Q):3x+2y-z+10=0$.

برهن أنّ (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي: $(t\in\mathbb{R})$; $\begin{cases}x=t-3\\y=-t\\z=t+1\end{cases}$.

3) عيّن تقاطع المستويات (ABC)، (P) و (Q).

4) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M و المستوي (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M و المستوي (Q)، عيّن المجموعة (Γ) للنقط M بحيث:

$\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$.

التمرين التاسع والثلاثون: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2014

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\y=-2-2t\\z=1-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R}) \qquad \text{و} \qquad (\Delta_2):\begin{cases}x=1\\y=-1-t'\\z=4+2t'\end{cases}\ (t'\in\mathbb{R})$$

1) أ) عيّن إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

ب) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) المعيّن بالمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

2) أ) أثبت أن النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي إلى المستوي (P)

ب) بيّن أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

3) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

ب) عيّن إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.

4) أ) عيّن طبيعة المثلث BCD، ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

ب) استنتج مساحة المثلث ACD

التمرين الأربعون: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2014

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء حيث $A(0;-1;1)$ ، $B(1;3;2)$ و $C(-1;3;4)$

1) أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات، للزاوية $\widehat{BAC}$

ب) بيّن أن النقط A ، B ، C تعين مستويا.

2) أ) بيّن أن الشعاع $\vec{n}(2;-1;2)$ ناظمي للمستوي (ABC)

ب) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) ليكن (S) سطح الكرة الذي معادلته: $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$

نسمي Ω و R مركز و نصف قطر (S) احسب R وعيّن احداثيات Ω

4) أكتب معادلة ديكارتية لكل من المستويين (P_1)و (P_2) مماسي سطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

التمرين الواحد والأربعون: بكالوريا شعبة رياضيات 1991

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء محاوره (OX) ، (OY) ، (OZ)

نعتبر النقطة $A(1;-2;4)$ و المستوي (P) الذي معادلته : $2x-3y+z+2=0$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و يعامد المستوي (P) .
2. عيّن إحداثيات النقطة B تقاطع (Δ) و (P) .
3. اكتب معادلة لسطح الكرة (S)التي مركزها Aوالتي تمس المستوي (P).
4. عيّن إحداثيات C، D نقطتي تقاطع سطح الكرة (S)والمستقيم (OZ)
5. ما هي إحداثيات مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$

التمرين الثاني والأربعون: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2014

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(2;1;-1)$ ، $B(-1;2;4)$ ، $C(0;-2;3)$ و $D(1;1;-2)$ والمستوي (P) المعرف بالمعادلة الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

1) النقط A ، B و C تعين مستويا.
2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P)
3) $x-2y-z-1=0$ هي معادلة للمستوي (ACD)
4) $\begin{cases} x=2t \\ y=-2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$ ؛ $t\in\mathbb{R}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AC)
5) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) تساوي $\frac{3}{2}$
6) النقطة $E(-2;-1;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة C على (P)
7) سطح الكرة ذات المركز D و نصف القطر $\frac{\sqrt{6}}{2}$ هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overline{AM}\cdot\overline{CM}=0$

التمرين الثالث والأربعون: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2014

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;1;3)$ و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه له . (Δ') المستقيم المعرف بجملة المعادلتين: $\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases}$

1) جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ')
2) بيّن أنّ (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.
3) (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ). بيّن أن معادلة المستوي (P) هي: $2x+y+2z-3=0$
4) $M(1+t;1+2t;3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ)، حيث $t\in\mathbb{R}$. احسب d المسافة بين M والمستوي (P)
5) أ) عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ'') الذي يشمل A' ويوازي (Δ)

ب) بيّن أنّ (Δ') و (Δ'') يتقاطعان في النقطة $B(1;3;-1)$

6) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(t)=BM^2$

أ) بيّن أنّ: $f(t)=9t^2-24t+20$

ب) بيّن أنّ f تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$ يطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$

جـ) تحقّق أنّ $d=\sqrt{f(t_0)}$

بكالوريات أجنبية

(BAC LIBAN 2006)

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .تعطى النقط :

$A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$

1.أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

2. ليكن (d) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$ $(t\in R)$

أ) بيّن أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) .

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3. لتكن H النقطة المشتركة للمستقيم (d) والمستوي (ABC).

أ) بيّن أن النقطة H مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$

ب)عيّن طبيعة المجموعة(Γ_1) للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ وحدد العناصر المميزة

جـ) عيّن طبيعة المجموعة(Γ_2) للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$ وحدد العناصر المميزة

د) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(\Gamma_1\cap\Gamma_2)$.

هـ) هل النقطة **S(-8; 1 ; 3)** تنتمي للمجموعة $(\Gamma_1\cap\Gamma_2)$.

(d'après Bac 2001 polynésien française septembre)

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. تعطى النقط :

$A(2;-1;0)$ ، $B(0;3;-4)$ ، $D(4;1;1)$ ، $S\left(0;3;\frac{1}{2}\right)$

1/ عين إحداثيات النقطة C حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.

2/ احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

3/ أ) اوجد تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABD) . ب)استنتج معادلة ديكارتيه له.

4/ أ) اوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)الذي يشمل S ويعامد المستوي (ABD)

ب) اوجد إحداثيات النقطة I تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABD)

ج) برهن أن I نقطة من القطعة $[BD]$ وحدد موقعها بالنسبة للنقطتين B و D

5 / احسب حجم الهرم $ABCDS$

(BAC Antilles -Guyane 2008)

(أسئلة متعددة الاختيارات)

كل سؤال يتضمن أربع اختيارات من بينها اختيار واحد

صحيح ، عيّنه مبررا إجابتك . الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث : $\begin{cases}2x-6y+2z-7=0\\-x+3y-z+5=0\end{cases}$ هي :

ج1:مجموعة خالية ، ج2) مستقيم ، ج3) مستوي ، ج4) نقطة

2) المستقيمان الممثلان وسيطيا كما يلي : $\begin{cases}x=1-t\\y=-1+t\\z=2-3t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ و $\begin{cases}x=2+t\\y=-2-t\\z=4+2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

ج1: متوازيان تماما ، ج2: متطابقان ، ج3: متقاطعان ، ج4) :ليسا من مستوي واحد

3) المسافة بين النقطة $A(1;-2;1)$ والمستوي الذي معادلته : $-x+3y-z+5=0$ هي :

ج1: $\frac{3}{11}$ ، ج2) : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ ، ج3: $\frac{1}{2}$ ، ج4: $\frac{8}{\sqrt{11}}$

4) إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة $B(1;6;0)$ على المستوي الذي معـــادلته:

$-x+3y-z+5=0$ هي :

ج1: $(3;1;5)$ ، ج2: $(2;3;1)$ ، ج3: $(3;0;2)$ ، ج4: $(-2;3;-6)$

BAC Antilles -Guyane 2005

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.

عيّن، في كل حالة مما يلي، النتيجة أو النتائج الصحيحة مع التبرير.

1/ المستقيم الذي يشمل $A(1;2;-4)$ و $B(-3;4;1)$ والمستقيم الذي تمثيله الوسيطي معرف بـ:

$$\begin{cases}x=-11-4t\\y=8+2t\\z=11+5t\end{cases}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

□ متقاطعان □ متوازيان تماما □ متطابقان □ ليسا من مستوي واحد

2/ ليكن المستوي (P) المعرف بالمعادلة : $2x+3y-z+4=0$ والمستقيم (d)المعرف بـ:

$$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=8+t\end{cases}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

□ (P) و (d) متقاطعان □ (P) و (d) متوازيان تماما

□ (d) محتواه في (P) □ لآ احد من هذه الإمكانيات صحيحة

3/ المسافة بين النقطة $A(1;2;-4)$ والمستوي المعرف بالمعادلة : $2x+3y-z+4=0$

□ $\frac{8\sqrt{14}}{7}$ □ 16 □ $8\sqrt{14}$ □ $\frac{8}{7}$

4/ لتكن النقطة $B(-3;4;1)$ وسطح الكرة (S) المعرف بالمعادلة : $x^2+y^2+z^2=16$

□ B داخل (S) □ B خارج (S) □ B نقطة من (S) □ لا نعرف

(Bac Centres etrangers 2008)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

النقط: $A(2;1;-1)$, $B(-1;2;4)$, $C(0;-2;3)$, $D(1;1;-2)$

و المستوي (P) الذي معادلته: $x-2y+z+1=0$

- في كل اقتراح مما يلي أذكر إن كانت الجملة صحيحة ام خاطئة مبررا ذلك .

1) النقط A ، B و C تعين مستوي ، 2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P)

3) معادلة ديكارتية للمستوي (ABD) هي: $x+8y-z-11=0$

4) المستقيم (AC) له تمثيل وسيطي الجملة التالية: $(k\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=2k \\ y=2+3k \\ z=3-4k \end{cases}$

5) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ، 6) بعد النقطة C عن المستوي (P) يساوي $4\sqrt{6}$

7) سطح الكرة التي مركزها D ونصف قطرها $\frac{\sqrt{6}}{3}$ مماسة للمستوي (P)

8) النقطة $E\left(-\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$ المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P)

(BAC Antilles -Guyane 2007)

فى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .تعطى النقطتين(A(3; 0 ; 6 و (I(0; 0 ; 6

وليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطتين A وI

نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بالمعادلتين التاليتين :

$(P): 2y+z-6=0$ و $(Q): y-2z+12=0$

1.بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان

2.بيّن أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D)

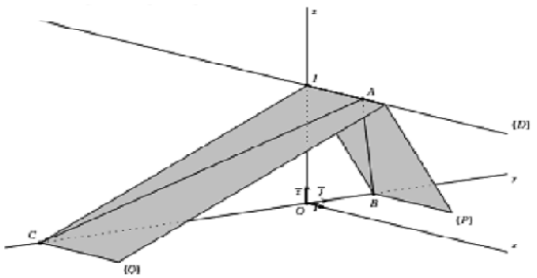
3.بيّن أن المستويين (P) و (Q) يقطعان ، على الترتيب ،المحور $(O;\vec{j})$ في النقطتين B وC

4. اثبت أن معادلة للمستوي (T) يشمل النقطة B والشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي له هي :

$$x+4y+2z-12=0$$

5. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA) .برهن أن المستقيم (OA) والمستوي (T) يتقاطعان في نقطة H يطلب تعيين إحداثياتها.

6.ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC ؟ علل جوابك.



(d'après Bac FRANCE 2008)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط

$A(1;1;0)$ ، $B(1;2;1)$ و $C(3;-1;2)$

1- تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x+y-z-3=0$

2- نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفيين على الترتيب بالمعادلتين :

$x+2y-z-4=0$ و $2x+3y-2z-5=0$

- بيّن أن المستويين (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم $(\mathfrak{D})$ تمثيله الوسيطي هو:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}):$$

3- درس تقاطع المستويات (P) ، (Q) و (ABC)

4- عيّن بعد النقطة A عن المستقيم $(\mathfrak{D})$.

(Bac FRANCE 2006)

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء . تعطى النقط :

$A(2;4;1)$ $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ ، $D(1;0;-2)$ ، $E(3;2;-1)$ ، $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$

بيّن – مع التعليل – صحة أو خطأ الجمل التالية : 1) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان

2) معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x+2y-z-11=0$

3) النقطة E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

4) المستقيم (CD) ممثل وسيطيا بالجملة : $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

5) النقطة I تنتمي للمستقيم (AB) .

(Bac FRANCE 2005)

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة B(1; -2 ; 1) و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له والمستوي **(R)** المعرف بالمعادلة الديكارتية : $x+2y-7=0$

أ- بيّن أن المستويين (P) **و(R)** متعامدان.

ب- برهن أن تقاطع المستويين **(P)** و**(R)** هو المستقيم **(Δ)** الذي يشمل النقطة(1- ; 4 ;1-)C وشعاع توجيه له $\vec{u}(2;-1;1)$

جـ) لتكن النقطة (1- ; 2- ; 5)A . احسب بعد النقطة **A** عن المستوي **(P)** ثم بعد النقطة **A** عن المستوي **(R)** .

د) عيّن بعد النقطة **A** عن المستقيم **(Δ)**.

2. أ) من أجل كل عدد حقيقي t ، نعتبر النقطة $M_t(1+2t;3-t;t)$.

- عيّن بدلالة t الطول AM_t .ونرمز لهذا الطول بـ $\varphi(t)$.ونعرف الدالة φ من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

ب) ادرس إتجاه تغير الدالة φ واستنتج القيمة الحدية الصغرى لها .

جـ) فسّر هندسيا هذه القيمة الحدية الصغرى.

(بكالوريا المغرب علوم تجريبية الدورة الاستدراكية 2006)

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقط :

$C(2;1;-2)$ ، $B(1;-1;1)$ ، $A(1;2;-2)$

1. بيّن أن النقـط A، B وC تعيّن مستويا ثم اكتب معادلة ديكارتية للمستوي **(ABC)** .

2.لتكن **(S)** سطح الكرة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ ونصف قطرها $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

أ- بيّن أن المستوي **(ABC)** مماس لسطح الكرة **(S)** ثم حدد إحداثيات **H** نقطة تماس **(ABC)** و**(S)**

ب- لتكن $M(a,b,c)$ نقطة من المستوي **(ABC)** .بيّن أن : $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

(d'après Bac polynésien 2008)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(1;2;3)$، $B(0;1;4)$، $C(-1;-3;2)$ ، $D(4;-2;5)$ و الشعاع $\vec{n}(2;a;b)$.

1. أ) أثبت أن النقط A ، B وC ليست على استقامة واحدة.

ب) اوجد العددين a و b حتى يكون $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

ج) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2. (Δ) مستقيم معرف بالتمثيل الوسيطي : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t\\z=4-t\end{cases}$

- برهن أن النقطة D تنتمي للمستقيم (Δ) و أن هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC).

3 . لتكن النقطة E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

4 -برهن أن النقطة E مركز ثقل المثلث ABC .

(Bac Amérique duSud 2009)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

الجزء الأول :نعتبر المستوي P حيث $ax+by+cz+d=0$ ، $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ معادلة ديكارتية له

A. نقطة إحداثياتها $(x_A;y_A;z_A)$.

- برهن أن البعد بين A و P هو العدد الحقيقي الموجب $d(A;P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

الجزء الثاني : نعتبر النقط $A(3;-2;2)$، $B(6;-2;-1)$ ، $C(6;1;5)$ ، $D(4;0;-1)$

1- بيّن أن المثلث ABC قائم ثم احسب مساحته

2- بيّن أن الشعاع $\vec{n}1(3;-2;1)$ ناظم للمستوي (ABC) .

- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3- احسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC)

- احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

الجزء الثالث : $(\mathcal{Q})$ مستوي معادلته الديكارتية :$x-2y+z-5=0$

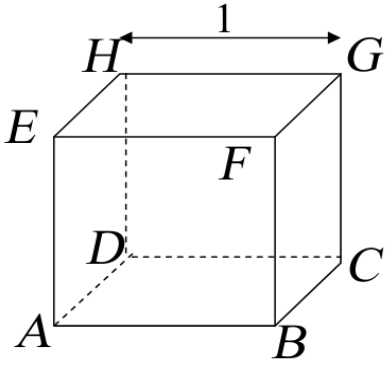
1.عيّن الوضعية النسبية للمستويين $(\mathcal{Q})$ و (ABC)

2. $(\mathcal{Q})$ يقطع المستقيمات (DA) ، (DB) و (DC) على التوالي في النقط E ، F و G

- عيّن إحداثيات النقطة E و برهن أنها تنتمي للقطعة $[DA]$.

3.عيّن حجم رباعي الوجوه $EFGD$.

BAC POLYNÉSIE 10 JUIN 2011



نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه 1 الممثل كما يلي :
في كل التمرين ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$

و نسمي K مرجح النقطتين المثقلتين $(D,1)$ و $(F,2)$.

الجزء الأول: 1- بيّن أن إحداثيات النقطة K هي : $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

2- بيّن أن المستقيمين (EK) و (DF) متعامدان

3- احسب المسافة EK

الجزء الثاني : M نقطة من القطعة $[HG]$.نضع $m = HM$ (إذا m عدد حقيقي من المجال $[0;1]$)

1- برهن أن من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[0;1]$ ؛ حجم رباعي الوجوه $EMFD$ يساوي $\frac{1}{6}$ وحدة حجوم .

2 - بيّن أن معادلة ديكارتية للمستوي (MFD) هي : $(-1+m)x+y-mz=0$

3- نسمي d_m المسافة بين النقطة E و المستوي (MFD)

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[0;1]$ ، $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

ب) عيّن موضع النقطة M على القطعة $[HG]$ بحيث تكون المسافة d_m أعظمية .

ج) استنتج أنه عندما تكون المسافة d_m أعظمية فإن النقطة K المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (MFD) .

(Bac Amérique du nord 2009)

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه 1.

لتكن I مركز ثقل المربع $ADHE$ و J مركز ثقل المربع $ABCD$ ، K منتصف $[IJ]$

نعتبر المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

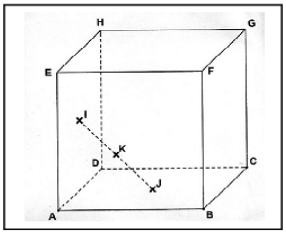
1 – عين إحداثيات النقاط I ، J ، K في المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

2 – بين أن النقط A ، K و G ليست في إستقامية .

3 - أ - بين أن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ هو المستوي (AKG) .

ب - أعط معادلة ديكارتية للمستوي (AKG) .

جـ - تحقق أن النقطة D تنتمي للمستوي (AKG) .



4-نسمي L مركز المربع $DCGH$

أ) بيّن أن K منتصف القطعة $[AL]$.

ب) برهن أن K مرجحا للنقط A ، D و G بمعاملات يطلب تعيينها .

(Bac Pondichéry 2007)

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.نعتبر المستوي **(P)** ذو المعادلة $2x+y-2z+4=0$ و النقط: A(3; 2 ; 6) ، B(1; 2 ; 4) ، C(4; -2 ; 5)

1. أ) بيّن أن النقـط **A**، **B** و**C** تعيّن مستويا . **ب-** بيّن أن هذا المستوي هو المستوي **(P)** .

2. أ) بيّن أن المثلث ABC قائم

ب) Δ مستقيم يشمل **O** ويعامد المستوي **(P)** ، أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ

جـ) **K** المسقط العمودي للنقطة **O** على **(P)** . احسب **OK**

د) احسب حجم الرباعي OABC

3. نعتبر الجملة المثقلة : $S=\{(O;3),(A;1),(B;1),(C;1)\}$

أ) بيّن أن هذه الجملة تقبل مرجحا نرمزله بـ G

ب) نرمز بـ **I** إلى مركز ثقل المثلث ABC . بيّن أن **G** تنتمي إلى المستقيم **(OI)** .

جـ) عيّن المسافة بين **G** والمستوي **(P)**

4. أ) عيّن **(E)** مجموعة **M** من الفضاء التي تحقق : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$

ب) ما هي مجموعة النقط المشتركة بين **(P)** و**(E)** .

(Bac Amérique du nord 2008)

<u>الجزء(ا)</u> نعتبر النقطتان A و D من الفضاء . ولتكن I منتصف القطعة $[AD]$

1) برهن أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء فإن : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$

2) استنتج المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$

<u>الجزء(ب)</u> الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط :

$A(3;0;0)$ ، $B(0;6;0)$ ، $C(0;0;4)$ ، $D(-5;0;1)$

1/ تحقق أن $\vec{n}(4;2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .ثم اوجد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2/ اوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) ويشمل النقطة D

3/ لتكن H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .استنتج إحداثيات النقطة H

4/ احسب بعد النقطة D على المستوي (ABC) .

5/ برهن أن النقطة H تنتمي إلى المجموعة (E) المعرفة في الجزء (أ)

(بكالوريا علوم تجريبية المغرب دورة 2006)

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

النقطة A(3 ; -1 ; 1) والمستوي (P) الذي معادلته : x-y+3z=0

1.أ) تحقق من أن : $\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=3t\end{cases}$ $(t\in R)$ تمثيل وسيطي للمستقيم **(OA)** .

ب) حدد معادلة ديكارتية للمستوي **(Q)** العمودي على المستقيم في النقطة **A**

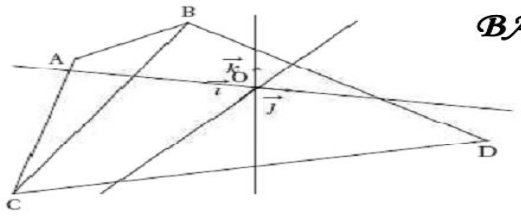
ج) تحقق من أن (P) يوازي المستوي **(Q)** .

2. نعتبر سطح الكرة (S) المماسة للمستوي (Q) في **A** والتي يقطعها المستوي (P) وفق الدائرة Γ التي مركزها **O** ونصف قطرها $\sqrt{33}$.

أ) بيّن أن $\Omega(a;b;c)$ مركز سطح الكرة (**S**) ينتمي إلى **(OA)** ثم استنتج أن : c=3a و b=-a

ب) بيّن أن : $\Omega A^2-\Omega O^2=33$ ثم استنتج أن : a-b+3c=-11

ج) استنتج إحداثيات Ω مركز سطح الكرة (**S**) وبيّن أن نصف قطرها يساوي



BAC ASIE 2003

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.نعتبر النقط (2 ; -2 ; 3)A ،
(6 ; 1 ; 5)B ، (6 ; -2 ; - 1)C

I) 1) بين أن المثلث ABC قائم .

2) ليكن **(P)** المستوي الذي معادلته :

$x+y+z-3=0$. بين أن **(P)** عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة **A** .

3) ليكن (P') المستوي العمودي على المستقيم (AC) و الذي يشمل **A** .

- أكتب معادلة ديكارتية لـ (P')

4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

II) 1) لتكن D النقطة ذات الاحداثيات $(0;4;-1)$، بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

2) أحسب حجم رباعي الوجوه ABDC

3) بين أن قيس الزاوية $B\widehat{D}C$ هو $\frac{\pi}{4}$ راديان

4) أ) أحسب مساحة المثلث BDC . ب) استنتج بعد النقطة **A** عن المستوي (BDC)

(d'après Bac polynésien 2009)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.نعتبر النقط :

$A(1;-1;3)$ ، $B(0;3;1)$ ، $C(6;-7;-1)$ ، $D(2;1;3)$ ، $E(4;-6;2)$

1. أ) بيّن أن : E مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$

ب) عيّن طبيعة و عناصر (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$$

2 . أ) بيّن أن النقـط A ، B و D تعيّن مستويا.

ب) بيّن أن المستقيم (EC) عمودي على المستوي (ABD).

ج) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABD) .

3. أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EC).

ب) عيّن إحداثيات F نقطة تقاطع المستقيم (EC) والمستوي (ABD) .

4. أ) بيّن أن المستوي (ABD) و المجموعة (Γ) يتقاطعان

ب)عيّن العناصر المميزة لمجموعة تقاطعهما .

BAC S Centres étrangers 2012

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه 1 الممثل كما يلي :

في كل ما يلي ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس : $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ نعتبر النقط $I\left(1;\frac{1}{3};0\right)$ و $J\left(0;\frac{2}{3};1\right)$ و $K\left(\frac{3}{4};0;1\right)$

و $L\left(a;1;0\right)$ حيث a عدد حقيقي من المجال $\left[0;1\right]$.

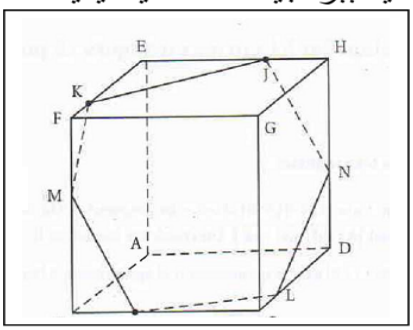
الجزء الأول: 1- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(IJ\right)$.

2-بيّن أن المستقيم $\left(KL\right)$ له تمثيل وسيطي كما يلي : $\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$

3-برهن أن المستقيمين $\left(IJ\right)$و $\left(KL\right)$ متقاطعين إذا وفقط إذا كان $a = \frac{3}{4}$.

الجزء الثاني: في كل مايلي نفرض $a = \frac{1}{4}$ ومنه $L\left(\frac{1}{4};1;0\right)$ 1- برهن أن الرباعي $IKJL$ متوازي أضلاع.

الشكل الأتي يبرز تقاطع المستوي $\left(IJK\right)$ مع أوجه المكعب و تحصلنا عليه ببرمجية هندسة ديناميكية



نسمي النقطة M نقطة تقاطع المستوي $\left(IJK\right)$والمستقيم $\left(BF\right)$

و النقطة N تقاطع المستوي $\left(IJK\right)$ و المستقيم $\left(DH\right)$

أ- برهن أن الشعاع $\vec{n}(8;9;5)$ ناظم للمستوي $\left(IJK\right)$

ب-استنتج أن المستوي $\left(IJK\right)$ له معادلة ديكارتية:

$$8x + 9y + 5z - 11 = 0$$

جـ - استنتج إحداثيات النقطتين M و N

(بكالوريا تونس دورة 2009)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبر المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(-3\,;-1;-3)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(2;-2;-1)$

و المستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

1- أ) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (D) متعامدان ولا ينتميان لنفس المستوي .

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يحوي (Δ) و يوازي (D) .

2- لتكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2z - 34 = 0$$

و المستوي (P) الذي معادلته : $2x + y + 2z + 13 = 0$

أ) برهن أن S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها C ونصف قطرها R

ب) بيّن أن (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها A يطلب تعيين نصف قطرها.

ج) بيّن أن المستقيم (D) مماس لسطح الكرة (S) في نقطة B يطلب تعيينها.

3- أ) احسب AB و استنتج أن النقطة C تنتمي للقطعة $[AB]$

ب) عين مستقيما عموديا على كل من المستقيمين (Δ) و (D)

BAC France 2009

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A\left(1;-1;3\right)$ ، $B\left(0;3;1\right)$، $C\left(6;-7;-1\right)$ ، $D\left(2;1;3\right)$ و $E\left(4;-6;2\right)$

1°) أ/بيّن أن مرّجح الجملة $\left\{A(2),B(-1),C(1)\right\}$ هو النقطة E

ب/ أوجد طبيعة $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M من الفضاء : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$

2°) أ/ بين أن النقط A، B و D تُعرف مستويًا

ب/ بيّن أن المستقيم$\left(EC\right)$ عمودي على المستوي$\left(ABD\right)$

ج/ عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي $\left(ABD\right)$

3°) أ/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(EC\right)$

ب/ عيّن احداثيات النقطة F تقاطع $\left(EC\right)$ مع المستوي$\left(ABD\right)$

4°) بيّن أن المستوي $\left(ABD\right)$ والمجموعة $\left(\Gamma\right)$ متقاطعان، عيّن العناصر المميزة لهذا التقاطع.

BAC France2011

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A\left(1;2;-1\right)$ ، $B\left(-3;-2;3\right)$، $C\left(0;-2;-3\right)$ ، $G\left(2;0;-5\right)$

1°) أ/ بين أن النقط A، B و C ليست في إستقامية

ب/ برهن أن الشعاع $\vec{n}\left(2;-1;1\right)$ ناظم للمستوي $\left(ABC\right)$

2°) ليكن $\left(P\right)$المستوي ذا المعادلة :$x+y-z+2=0$

- أثبت أن المستويين$\left(ABC\right)$ و $\left(P\right)$ متعامدان

3°) أ/بيّن أن مرّجح الجملة $\left\{A(1),B(-1),C(2)\right\}$ هو النقطة G

ب/ بيّن أن المستقيم$\left(CG\right)$ عمودي على المستوي$\left(P\right)$

ج/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(CG\right)$

د/ عيّن إحداثيات النقطة H تقاطع $\left(CG\right)$ مع المستوي$\left(P\right)$

4°) برهن أن $\left(S\right)$ مجموعة النقط M من الفضاء : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$

هي سطح كرة يطلب تعيين العناصر المميزة لها.

5°) عيّن طبيعة تقاطع المستوي $\left(P\right)$ مع سطح الكرة $\left(S\right)$ وأعط عناصره المميزة

BAC France 2006

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ تعطى النقط :

$A\left(2,1,3\right)$ ، $B\left(-3,-1,7\right)$ و $C\left(3,2,4\right)$

1°) بيّن أن النقط : A ، B و C ليست في إستقامية

2°) ليكن $\left(d\right)$ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \;;\; t\in\mathbb{R} \\ z=4+t \end{cases}$

أ/ بيّن أن المستقيم $\left(d\right)$ عمودي على المستوي $\left(ABC\right)$

ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$

3°) لتكن H النقطة المشتركة بين المستقيم $\left(d\right)$ والمستوي $\left(ABC\right)$

أ/ بيّن أن H مرّجح الجملـــة : $\left\{A\left(-2\right),B\left(-1\right),C\left(2\right)\right\}$

ب/ عيّن $\left(\Gamma_1\right)$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

محددًا العناصر المميزة

ج/ عيّن $\left(\Gamma_2\right)$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

محددًا العناصر المميزة

د/ عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $\left(\Gamma_1\cap\Gamma_2\right)$

هـــ) هل النقطة $D\left(-8;1;3\right)$ تنتمي إلى المجموعة $\left(\Gamma_1\cap\Gamma_2\right)$

بكالوريا تونس 2004

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

$\left(P\right)$ المستوي الذي معادلة : $x+y-z+2=0$

1°) أ/ تحقق من أن النقطة $I\left(0;-1;1\right)$ تنتمي إلى $\left(P\right)$

ب/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(D\right)$ العمودي على $\left(P\right)$ في I

ج/ تحقق من أن النقطة $\Omega\left(1;0;0\right)$ تنتمي إلى $\left(D\right)$

2°) $\left(C\right)$ الدائرة من $\left(P\right)$ التي مركزها I ونصف قطرها 1 و $\left(S\right)$ سطح الكرة التي مركزها

Ω وتقطع المستوي (P) في (C)

أ/ بيّن أن نصف قطر (S) هو 2

ب/ عيّن معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S)

3°) m عدد حقيقي و (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث

$$x^2+y^2+z^2+mx+(m+2)y-(m+2)z+2m+1=0$$

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي m، (S_m) سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزه I_m ونصف قطره

ب/ بيّن أن مجموعة النقط I_m هي المستقيم (D) عندما يتغير m

--------انتـهـــى--------

إني أفضل أن يرتوي تلاميذي من مجرى ماء جار على أن ينهلوا من مستنقع راكد آسن

والله ولي التوفيق