مسـائل محلولة من الكتاب المدرسي

مسألة رقم 113 الكتاب المدرسي صفحة 36

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ :

$$f\left(x\right)=|\,x+1|+\frac{x}{x^{2}-1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب) ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أ) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها .

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بين أن المستقيمين $\Delta: y=x+1$ و $\Delta': y=-x-1$ مقاربين للمنحني (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ على المجال $]1;+\infty[$

ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ' على المجال $]-\infty;-1[$.

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً واحداً α على المجال $]-1;1[$ ، وأعط حصراً لـ α سعته 10^{-1} .

5) أنشئ المنحن (C) و المستقيمات Δ و Δ' .

6)بين ان استنتج بيانيا عدد حلول المعادلة $f\left(x\right)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي.

الحل

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـِ :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ :

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

(أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

لدينا $|x+1|=-x-1$ **إذا كان** $x\leq -1$

و لدينا $|x+1|=x+1$ **إذا كان** $x\geq -1$

ومنه من أجل $x\in]-\infty;-1[$ **فإن** $f(x)=-x-1+\frac{x}{x^2-1}$

ومنه من أجل $x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[$ **فإن** $f(x)=x+1+\frac{x}{x^2-1}$

ب) ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أ) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها .

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

بمأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=0^+ \end{cases}$ فإن لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

بمأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}(-x-1)=0 \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty \end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty$

بمأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(-x-1)=0 \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty \end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$

ومنه فإن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ هو مستقيم مقارب يوازى محور التراتيب .

بمأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}(x+1)=2 \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=-\infty$

بمأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}(x+1)=2 \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$

ومنه فإن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ هو مستقيم مقارب يوازى محور التراتيب .

بمأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=0 \end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال D_f و دالتها المشتقة f' هي

$$f'(x)=-1+\frac{(x^2-1)-x\times 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=-1+\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

ومنه من أجل $x\in]-\infty;-1[$ فإن

$$f'(x)=-\left[1+\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right]$$

$$f'(x)=1+\frac{(x^2-1)-x\times 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=1+\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

ومنه من أجل $x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[$ فإن

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)^2-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

إشارة المشتقة على المجال $x \in]-\infty;-1[$

لدينا $f'(x) \leq 0$ من أجل كل من المجال $]-\infty;-1[$ و **متناقصة تماما على المجال** $]-\infty;-1[$

إشارة المشتقة على المجال $x \in]-1;1[\cup]1;+\infty[$

إشارة المشتقة من إشارة البسط أي $x^2(x^2-3)$

ومنه $f'(x)=0$ يعنى أن $x^2(x^2-3)$

أي $x^2(x^2-3)=0$

وبتالى $\begin{cases} x^2=0 \\ x^2-3=0 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x=0 \\ x^2=3 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=0 \\ x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{cases}$

جدول الإشارة المشتقة

x	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		+	0	+		+		+	
(x^2-3)		-		-	0	-	0	+	
$f'(x)$		-	0	-	||	-	0	+	

لدينا $f'(x)<0$ إذا كان $x \in]-1;1[\cup]1;\sqrt{3}[$ و f متناقصة تماما على المجالين $]-1;1[$ و $]1;\sqrt{3}[$.

لدينا $f'(x) \geq 0$ إذا كان $x \in]\sqrt{3};+\infty[$ و f متنزايدة تماما على المجال $]\sqrt{3};+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

ملاحظة

المشتقة الأولى تنعدم ولا تغير إشارتها عند 0 و منه المنحنى C_f يقبل نقطة إنعطاف إحداثياتها $(0;1)$

أكتب معادلة للمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

و بمأن $f'(0)=0$ و $f(0)=1$

ومنه معادلة المماس هي $y = 0(x-0)+1$.

أي $y = 1$

4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $\Delta : y = x+1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) يكافيء

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}-(x+1)\right]$$

وبمأن

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}\right]=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+1$ مستقيم مقارب مائلا للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

ندرس إشارة الفرق $(f(x)-y)$.

$$f(x)-y=f(x)-(x+1)$$

$$f(x)-y=\frac{x}{(x^2-1)}$$

إشارة الفرق من إشارة ا $x(x^2-1)$

جدول الإشارة

x	-1		0		1		$+\infty$
x		-	0	+		+	
(x^2-1)		-		-		+	
$f(x)-y$		+	0	-		+	

تكون $f(x)-y<0$ إذا كان $x\in]0;1[$ والمنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

تكون $f(x)-y>0$ إذا كان $x\in]-1;0[\cup]1,+\infty[$ والمنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

تكون $f(x)-y=0$ إذا كان $x=0$ والمنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ذات افحداثيات $\omega(0,1)$

) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $\Delta':y=-x-1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $-\infty$

المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=-x-1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) يكافىء

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x-1)]=0$ و

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x-1+\frac{x}{x^2-1}-(-x-1)\right]$$

وبمأن

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x-1$ مستقيم مقارب مائلا للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ').

$$f(x)-y=f(x)-(-x-1)$$

$$f(x)-y=\frac{x}{(x^2-1)}$$

إشارة الفرق من إشارة ا $x(x^2-1)$

جدول الإشارة

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ -1
x	-
(x^2-1)	+
$f(x)-y$	-

تكون $f(x)-y<0$ إذا كان $x\in\,]-\infty;-1[$ والمنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ') .

ملاحظة

للإيجاد ترتيب نقطة التقاطع (C_f) و (Δ) نعوض فى الدالة أو فى المستقيم (Δ) الذى ندرس الوضعية معه.

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً واحداً α على المجال $]-1;1[$ ، وأعط حصراً لـ α سعته 10^{-1} .

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;1[$ يطلب إيجاد، باستعمال حاسبة بيانية، حصر له سعته $0,1$.

بمأن الدالة مستمرة و رتيبة على المجال $]-1;1[$ و تأخذ قيمها فى $]-\infty;+\infty[$ و العدد 0 ينتمى إلى المجال $]-\infty;+\infty[$ ومن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α على المجال $]-1;1[$ يحقق $f(\alpha)=0$

حصر للعدد α سعته $0,1$. نستعين بالجدول التالى

x	0.6	0.7	0.8	0.9
$f(x)$	0.66	0.33	−0.42	−2.84

ومنه نستنتج أن الحصر المطلوب هو $0,7<\alpha<0,8$

8- بين ان استنتج بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث m وسيط حقيقي.

نناقش نقاط تقاطع المنحنى C_f و المستقيم (Δ) حيث $(\Delta): y = m$

اذا كان $m \in]-\infty;1[$ فإن المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة

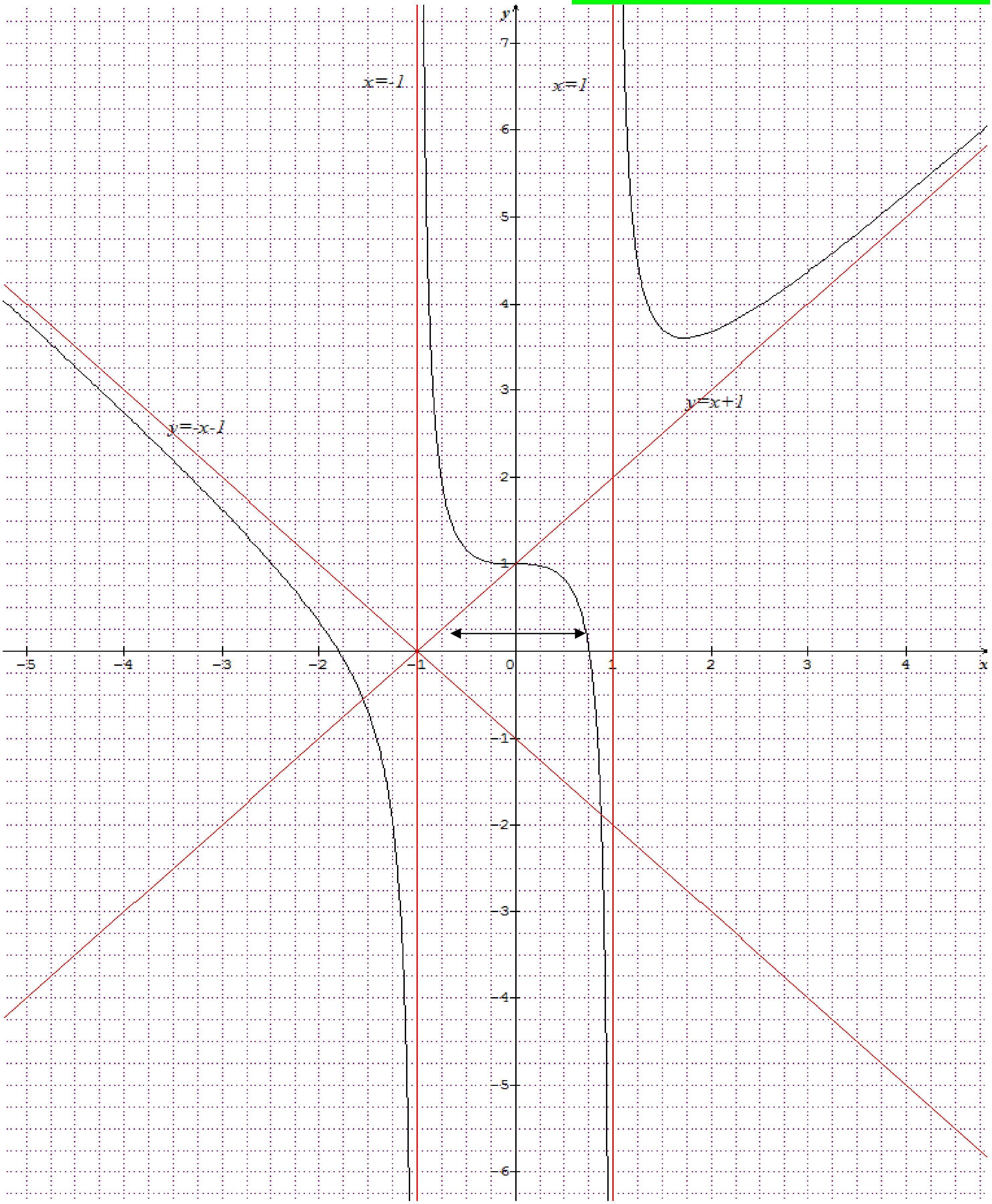
اذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حلمعدوم و أخر سالب .

اذا كان $m \in]1; f(\sqrt{3})[$ فإن المعادلة تقبل حلان سالبين

اذا كان $f(\sqrt{3})$ فإن المعادلة تقبلحلان سالبان و أخر موجب $x = \sqrt{3}$

اذا كان $m \in]\sqrt{3};+\infty[$ فإن المعادلة أربعة حلول اثنانى موجبة و اتنانى سالبان .

أرسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).



إنتهى بحمد الله
والله الموفق