BAC 2014

المتتاليـــــات

بكالوريات الشعب العلمية المشتركة

2008-2013

من إعداد: قايل محمد

التمرين رقم : 01 بكالوريا 2008 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الثاني (4 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=\alpha \quad ; \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \\ u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{8}{9} \quad ;(n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha=-\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) في كل مايلي $\alpha=2$ ، و نعرف المتتالية العددية (v_n) كما يلي : $v_n=u_n+\frac{8}{3}$

أ) احسب u_1 ، u_2 .

ب) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .

جـ) أكتب عبارة u_n بدلالة n . و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين رقم: 02 بكالوريا 2008 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الأول(5 نقاط):

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$.

1.احسب u_1 ، u_2 و u_3.

2.أ . اثبت بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq-2$

ب.جد اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج ؟

3. (v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=u_n+2$.

أ.بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية .

ب.عبر بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n.

جـ. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

د . احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

التمرين رقم: 03 بكالوريا 2008 علوم تجريبية

التمرين الثاني (05 نقط)

(u_n)متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0=\frac{5}{2}$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1) أ – ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

ب – باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0,u_1,u_2,u_3 وَ u_4

جـــ – ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 6$.

ب – تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـــ – هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

أ – اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب – أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين رقم: 04 بكالوريا 2008 علوم تجريبية

تمرين 2: (4 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+1$

1 – احسب U_1 و U_2 و U_3 .

2 – (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n=U_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

– برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة .

– استنتج عبارة U_n بدلالة n .

– احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3 – (W_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $W_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

– احسب المجموع S حيث : $S=W_0+W_1+W_2+...+W_n$.

التمرين رقم: 05 بكالوريا 2008 رياضيات

تمرين 2: (4 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+1$

1 – احسب U_1 و U_2 و U_3 .

2 – (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n=U_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

– برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة .

– استنتج عبارة U_n بدلالة n .

– احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3 – (W_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $W_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

– احسب المجموع S حيث : $S=W_0+W_1+W_2+...+W_n$.

التمرين رقم:06 بكالوريا 2009 تسيير و اقتصاد

التمرين الثاني (4 نقاط):

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3u_{n+1}=u_n+4$

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون $u_n\le 2$.

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

جـ) استنتج مع التبرير أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-2$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول و أساسها.

ب) أكتب الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n.

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=u_0+...+u_n$.

التمرين رقم:07 بكالوريا 2009 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الأول (05 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرّفة بـــ $U_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=3U_n-2$.

1. احسب U_1 ، U_2 .

2. لتكن المتتالية العددية (V_n) المعرفة بـــ : $V_n=U_n-1$.

أ – أثبت أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول V_0.

ب– اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n.

3. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1}-U_n=(-4)\times 3^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n).

4. عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون : $U_0+U_1+...+U_n=n-79$.

التمرين رقم:08 بكالوريا 2009 شعبة علوم تجريبية

التمرين الأول: (03.5 نقطة)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1}-u_n$

1) أُحسب v_0 و v_1.

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) أ) أُحسب بدلالة n المجموع S_n: $S_n=v_0+v_1+.......+v_{n-1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ) بيّن أن (u_n) متقاربة.

التمرين رقم:09بكالوريا 2009 شعبة علوم تجريبية

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}$

1. أ) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1.

ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـــ) أحسب S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n=728$

2. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:

$$v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n \qquad \text{و} \qquad v_1=2$$

أ) أحسب v_2 و v_3.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$.

بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

جـــ) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين رقم:10 بكالوريا 2009 شعبة رياضيات

تمرين 2: (5 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $U_0 = 0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 3U_n + 2n + 1$.

(V_n) المتتالية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n كما يلي : $V_n = U_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيا

1) عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (V_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدّها الأوّل .

2) احسب كلا من V_n و U_n بدلالة n.

3) احسب المجموعين S و S' حيث: $S = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$ و $S' = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$.

4) أ- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها U_n مضاعفا للعدد 5 .

التمرين رقم:11 بكالوريا 2010 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) n عدد طبيعي، أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + e + e^2 + ... + e^n$

(S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول 1 ؛ و e يرمز إلى اساس اللوغاريتم النبيري).

2) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$

بيّن أن: $w_n = u_n + v_n$

حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول وَ الأساس لكل منهما.

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$4 + 6 + 8 + ... + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$$

4) استنتج المجموع S بدلالة n حيث:

$$S = w_0 + w_1 + ... + w_n$$

التمرين رقم:12 بكالوريا 2009 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الثاني: (06 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$.

1) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3.

2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 2$.

ب - بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$.

أ - بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

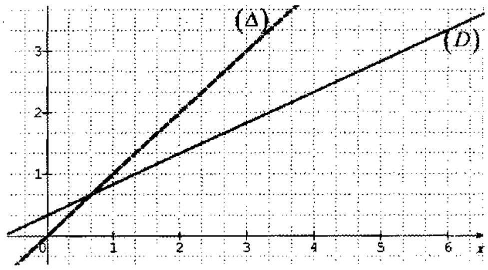
ب - اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

جـ - ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n

فإن: $u_0 + u_1 + ... + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$

التمرين رقم:13 بكالوريا 2010 شعبة علوم تجريبية



التمرين الأول: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثّلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب:

$y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

أ - انقل الشكل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود التالية: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 ؛ دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب - عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

جـ - أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) أ - باستعمال الاستدلال بالتراجع، اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ - بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ - احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ واستنتج المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين رقم:14 بكالوريا 2011 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الثاني: (05,5 نقطة)

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$.

1) احسب u_1 و u_2 .

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{3}$.

3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

4) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

أ. بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب. اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

ج. احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم:15 بكالوريا 2011 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل.

1. المتتالية (v_n) :

أ - حسابية. ب - هندسية. جـ - لا حسابية ولا هندسية.

2. نهاية المتتالية (u_n) هي :

أ - $+\infty$ ب - $-\frac{1}{2}$ جـ - $-\infty$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}\right]$.

أ - $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ ب - $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$ جـ - $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

التمرين رقم:16 بكالوريا 2011 شعبة تسيير و اقتصاد

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (04 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$.

1. أ - بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

ب - اكتب بدلالة n و α، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α، عبارة u_n.

جـ - عيّن قيّم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2. نضع $\alpha = \frac{3}{2}$.

- احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين رقم:17 بكالوريا 2011 شعبة رياضيات

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(U_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} U_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases} \quad \text{حيث:} \quad \begin{cases} m = PPCM\,(U_3, U_5) \\ d = PGCD\,(U_3, U_5) \end{cases}$$

1/ عيّن الحدين U_3 و U_5 ثم استنتج U_0

2/ اكتب U_n بدلالة n، ثم بيّن أن: 2010 حد من حدود (U_n) وعين رتبته.

3/ عين الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (U_n) يساوي 10080

4/ n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{2n}$

ب) استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث: $S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + ... + U_{2n}$

و $S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + ... + U_{2n-1}$

التمرين رقم:18 بكالوريا 2011 شعبة تقني رياضي

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$، ثم استنتج أن: $1 < u_n$

2/ ادرس اتجاه تغير (u_n) ثم بيّن أنها متقاربة ، احسب نهاية (u_n).

3/ ليكن الجداء p_n المعرف كما يلي: $p_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$.

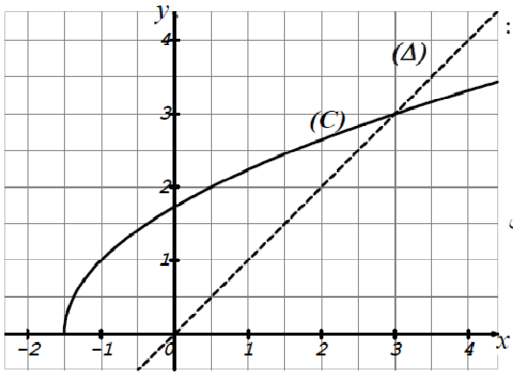
4/ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = \ln u_n$ حيث $\ln$ دالة اللوغاريتم النيبيري

عبّر بدلالة p_n عن S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ ثم احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$

التمرين رقم:19 بكالوريا 2012 شعبة علوم تجريبية

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$.



1) لتكن h الدالة المعرّفة على المجال $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $h(x)=\sqrt{2x+3}$ ، و (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو معادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (انظر الشكل المقابل).

أ) – أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1 ، u_2 و u_3.

(دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

ب) – ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$.

3) أ) – ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ب) – استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين رقم:20 بكالوريا 2012 شعبة علوم تجريبية

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $3<u_n<4$.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^{\,2}+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم احسب حدّها الأول.

ب) اكتب كلاًّ من v_n و u_n بدلالة n، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)$.

اكتب P_n بدلالة n، ثم بيّن أن $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=\frac{1}{16}$.

التمرين رقم:21 بكالوريا 2012 شعبة رياضيات

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=16$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=6u_n-9$.

1) أ– احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0 ، u_1، u_2، u_3، u_4 على 7 .

ب– خمّن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث: $u_{2k}\equiv a\,[7]$ و $u_{2k+1}\equiv b\,[7]$.

2) أ– برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2}\equiv u_n\,[7]$.

ب– برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k}\equiv 2\,[7]$، ثم استنتج أن: $u_{2k+1}\equiv 3\,[7]$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-\frac{9}{5}$.

أ– بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب– احسب، بدلالة n، كلا من u_n و S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

التمرين رقم: 22 بكالوريا 2013 شعبة علوم تجريبية (04 نقاط)

I) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0 = 1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 6$.

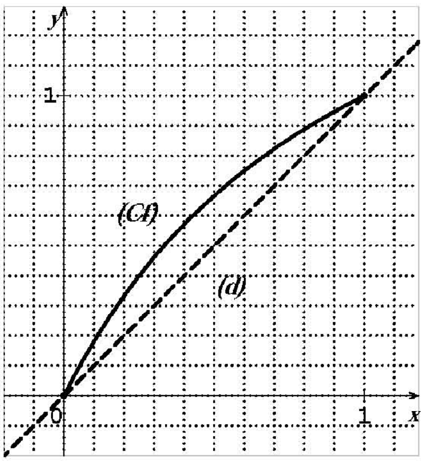
2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le 6 - u_n \le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين رقم: 22 بكالوريا 2013 شعبة علوم تجريبية

التمرين الثاني: (04 نقاط)



في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل، $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثمّ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ) أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

جـ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب) احسب نهاية (u_n).

التمرين رقم: 24 بكالوريا 2013 شعبة تقني رياضي (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

$u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثمّ احسب حدها الأول.

2) اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4) احسب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث: $p_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

تمارين إضافية

تمرين 01 :

(u_n) متتالية حسابية أساسها r.

(v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$w_n = u_{3n} + \sqrt{7} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2}$$

بين أن المتتاليتان (v_n) و (w_n) حسابيتان يطلب تعيين الأساس لكل منهما

تمرين 02 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{-1 + 2u_n}{u_n} \end{cases}$$

1- بين أن (v_n) متتالية حسابية.

2- أحسب v_n ثم u_n بدلالة n و استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

تمرين 03 :

1- أحسب قيمة العددين :

$T = 3+7+11+.....+999$ و $S = 6+10+14+.....+1002$

2- أحسب المجموع $S_n = 1+4+7+.....+(3n+1)$ بدلالة n

ثم استنتج قيمة العدد : $X = 1+4+7+...+2008$

تمرين 04 :

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1- أكتب u_n بدلالة n .

2- أحسب المجموع $u_1 + u_2 + ...+ u_7$

3- لتكن (v_n) متتالية بحيث : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ v_n = u_{2n}$

أحسب المجموع $v_1 + v_2 + ...+ v_n$

تمرين 05 :

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان بحيث: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ و $v_n = u_n + 3$

1- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

2- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n . استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3- أحسب : $S_n = v_1 + v_2 + ...+ v_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

4- أحسب المجاميع التالية :

$$\Sigma_n = u_1^2 + u_2^2 + ...+ u_n^2 \quad \text{و} \quad T_n = u_1 + u_2 + ...+ u_n$$

تمرين 06 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2}$$

1- لتكن (w_n) المتتالية المعرفة بـ : $w_n = u_n + v_n$.

برهن أن (w_n) متتالية هندسية .

2- لتكن (t_n) المتتالية المعرفة بـ : $t_n = u_n - v_n$.

برهن أن (t_n) متتالية حسابية.

3- عبر عن المجموع التالي بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$

تمرين 07 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = 4u_n - 6n + 15 \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 1 \end{cases}$$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

2- أحسب v_0 ثم أحسب v_n بدلالة n .

استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n = \dfrac{19}{4} \times \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{6n - 15}{4}$

3- برهن أن المتتالية (u_n) يمكن كتابتها على الشكل $u_n = t_n + w_n$

حيث : t_n متتالية هندسية و w_n متتالية حسابية .

4- أحسب $T_n = t_0 + t_1 + ... + t_n$ و $W_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$

ثم إستنتج : $U_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$

تمرين 08 :

ليكن a و b عددان حقيقيان موجبان تماما .

تعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases} u_0 = a \ , \ u_1 = b \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

نعتبر المتتاليتان (v_n) و (w_n) المعرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$w_n = u_{n+1} + 2u_n \quad \text{و} \quad v_n = u_{n+1} - 3u_n$$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها -2 و حدها الأول

$v_0 = b - 3a$ و أحسب v_n بدلالة n ، a و b

2- برهن أن (w_n) متتالية هندسية ثم أحسب w_n بدلالة n ، a و b

3- استنتج عبارة u_n بدلالة n ، a و b و أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

تمرين 09 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 0 \ , \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{1}{3}u_{n+1} + \dfrac{2}{3}u_n \end{cases}$$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n

2- أحسب $S_n = v_0 + v_1 + ...+ v_{n-1}$ ثم استنتج u_n بدلالة n

3- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

تمرين 10 :

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ :

$$v_n = u_n + bn - 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$$

1- بين أنه يوجد عدد طبيعي b تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول

2- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

3- أحسب $S_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$

تمارين إضافية (الإستدلال بالتراجع)

.1 المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0=-1$ و $u_{n+1}=3u_n+2$

برهن بالتراجع أن (u_n) متتالية ثابتة .

.2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ :

$$v_0=1 \text{ و } \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=v_n+2(n+1)$$

1- أحسب v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4

2- برهن بالتراجع أن : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=n^2+n+1$

.3 المتتالية (u_n) معرفة بـ :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{n}{n+1}$

.4 بكالوريا

نضع $S_n=1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2$ حيث $n\geq 1$

1- أ) أحسب S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 .

ب) عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n .

2- برهن بالتراجع أنه : $\forall n\geq 1,\ S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

.5 برهن بالتراجع أنه :

1- $\forall n\geq 1,\ 1\times 2+2\times 3+\dots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

2- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1^3+2^3+\dots\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3- $\forall n\geq 1,\ 1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n(n!)=(n+1)!-1$

.6 بين بالتراجع أنه :

1- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 2^n\geq n$

2- $\forall n\in\mathbb{N},\ (1+a)^n\geq 1+na \quad (a\in\mathbb{R}^+)$

3- $\forall n\geq 2,\ 5^n\geq 4^n+3^n$

4- $\forall n\geq 3,\ 3^n\geq (n+2)^2$

.7 من أجل كل عدد طبيعي n ، نعتبر الخاصية :

P_n : « $3^n\geq 2^n+5n^2$ »

1- بين أن : $\forall n\geq 2,\ 3n^2\geq (n+1)^2$

2- ما هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم n الذي من أجله تكون الخاصية P_n صحيحة .

3- برهن أنه من أجل كل $n\geq 5$ تكون P_n صحيحة .

.8 أثبت بالتراجع أنه :

1- من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n}-2^n$ مضاعف للعدد 7

2- من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{2n+1}+3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 5 .

3- لكل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، $3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ مضاعف للعدد 17.

4- من أجل كل عدد طبيعي n ، $(2n-1)3^n+1$ مضاعف للعدد 4 .

.9 بكالوريا

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$u_0=1 \text{ و } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+2n+3$$

1- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2- برهن أنه : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>n^2$

3- أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع هذا التخمين.

.10 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ :

$$v_0=1 \text{ و } \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=v_n-\frac{1}{n^2+3n+2}$$

1- أحسب v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4

2- أعط تخمينا لعبارة v_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع هذا التخمين.

.11 المتتالية (u_n) معرفة بـ :

$$u_0=1 \text{ و } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$$

1- برهن بالتراجع أنه : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq 2$

2- أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

.12 المتتالية (u_n) معرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n+3}{u_n+3},\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1- برهن بالتراجع أنه : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_n\leq 3$

2- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

.13 المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{2(u_n+1)}$

1- برهن أن : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$

2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3- أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{1}{2}$

ب) استنتج باستعمال التراجع أن : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

.14 المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n})$

1- باستعمال الآلة الحاسبة أحسب u_1 ، u_2 و u_3.

2- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3- لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$

- أدرس تغيرات الدالة f

- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>\sqrt{2}$ ثم استنتج تغيرات المتتالية (u_n) .

.15 المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0=1$ و $u_1=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2^n$

ملخص الدرس

	المتتاليات الحسابية	المتتاليات الهندسية
تعريف	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون **بإضافة** نفس الثابت r، ويسمى أساس المتتالية	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون **بالضرب** في نفس الثابت q، يسمى أساس المتتالية.
العلاقة التراجعية	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q\, u_n$
الحد العام	$u_n = u_0 + n r \longrightarrow$ الحد الأول u_0 $u_n = u_1 + (n-1) r \leftarrow$ الحد الأول u_1	$u_n = u_0 q^n \longrightarrow$ الحد الأول u_0 $u_n = u_1 q^{n-1} \longrightarrow$ الحد الأول u_1
العلاقة بين حدين	$\forall n \geq p \ , u_n = u_p + (n-p) r$	$\forall n \geq p \ , u_n = u_p q^{n-p}$
مجموع حدود متتابعة	$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$ **بصفة عامة** $S = \text{عدد الحدود} \times \frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}$ **حالة خاصة أساسية** $1 + 2 + 3 + \dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ **بصفة عامة** $S = \text{الحد الأول} \cdot \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$ **حالة خاصة أساسية** $1 + q + q^2 + \dots\dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ مع $q \neq 1$
النهايـــــات	$r > 0 \longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ $r < 0 \longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$	$q > 1 \longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ $q = 1 \longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$ $-1 < q < 1 \longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ $q \leq -1 \longrightarrow$ نهاية (q^n) غير موجودة
الوسط الحسابي و الوسط الهندسي	**الوسط الحسابي** (a , b , c حدود متتابعة من متتالية حسابية) $\Updownarrow$ $2b = a + c$ يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c	**الوسط الهندسي** (a , b , c حدود متتابعة من متتالية هندسية) $\Updownarrow$ $b^2 = a \cdot c$ يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c