الاستدلال بالتراجع

1. مبدأ الاستدلال بالتراجع

مسلمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n_0)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

$P(n_0)$ إذا كانت $P(n)$ فإن $P(n+1)$

صحيحة صحيحة صحيحة

المرحلة 1 المرحلة 2

الخلاصة:
من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 $P(n)$ صحيحة.

ملاحظة:

بصفة عامة المرحلة الأولى تتمثل في عملية تحقق بسيطة لا تطرح أي مشكل إلا أنها تبقى ضرورية لأنه يمكن لخاصية أن تكون وراثية و لكن خاطئة.

مثال:

الخاصية:" من أجل كل عدد طبيعي n، 3^n مضاعف للعدد 5 " خاطئة رغم أنها وراثية. بالفعل:

إذا كان 3^n مضاعفا للعدد 5 فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $3^n = 5k$.

لدينا إذن $3^{n+1} = 3\times 3^n = 3(5k) = 5(3K)$ و منه 3^{n+1} هو الآخر مضاعف للعدد 5.

المثال الأول

بين صحة الخاصية التالية: " من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ "

المرحلة الأولى: من أجل $n=1$ لدينا: $1=\frac{1\times 2}{2}$ و منه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

المرحلة الثانية (الوراثة):

- نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ أي:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

- و لنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

ومنه $$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

البرهان

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\underbrace{(1+2+3+\ldots+n)}+(n+1)$$

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

لدينا:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

و منه . $$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

الخلاصة:

" من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ "

تمرين محلول1:

برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3.

الحل:

الخاصية " $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع.

المرحلة الأولى: من أجل $n = 0$ فإن $0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$ و منه $0^3 - 0$ مضاعف للعدد 3.

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

المرحلة الثانية الوراثة:

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$

أي: $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3.

نضع $n^3 - n = 3k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $n^3 = 3k + n$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $\left[(n+1)^3 - (n+1)\right]$ مضاعف للعدد 3.

البرهان

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

$$(n+1)^3 - (n+1) = = (3k + n) + 3n^2 + 2n$$

$$(n+1)^3 - (n+1) = 3k + 3n^2 + 3n$$

$$(n+1)^3 - (n+1) = 3(k + n^2 + n)$$

و و بما أن $3(k + n^2 + n)$ مضاعف للعدد 3 نستنتج أن $(n+1)^3 - (n+1)$ مضاعف للعدد 3 .

الخلاصة:

من أجل كل عدد طبيعي n،فإن $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 .

تمرين محلول2:

(u_n) متتالية حدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$.

1. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2. ما ذا تستنتج ؟

الحل:

1. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

البرهان على أن (u_n) متناقصة يؤول إلى إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $(u_{n+1}-u_n\leq 0)$ $u_{n+1}\leq u_n$.

المرحلة 1: لدينا $u_1=\frac{1}{2}\times 4-1=1$ و منه $u_1\leq u_0$.

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي $u_{n+1}\leq u_n$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

البرهان

لدينا $u_{n+1}\leq u_n$ و منه بالضرب في العدد $\frac{1}{2}$ نجدد $\frac{1}{2}u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$

و منه بإضافة العدد -1 نجد $\frac{1}{2}u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}u_n-1$

و بتالي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

الخلاصة:

من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\leq u_n$. و منه المتتالية (u_n) متناقصة.

2. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 .

البرهان على أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 يؤول إلى إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n \geq -2$.

المرحلة 1:

لدينا $u_0 = 4$ و منه $u_0 \geq -2$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

المرحلة 2:

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_n \geq -2$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \geq -2$.

البرهان

لدينا $u_n \geq -2$ و منه بالضرب في العدد $\frac{1}{2}$ نجد $\frac{1}{2}u_n \geq \frac{1}{2}(-2)$

و منه بإضافة العدد -1 نجد $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq \frac{1}{2}(-2) - 1$

ومنه $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq -2$

أي $u_{n+1} \geq -2$

الخلاصة:

و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq -2$ و منه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 .

الإستنتاج :

من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq -2$ بمأن المتتالية (u_n) **متناقصة و** محدودة من الأسفل بالعدد -2

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .