BAC 2014

الأعداد المركبة

بكالوريات الشعب

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

2013-2008

من إعداد: قليل محمد

التمرين رقم: 1 بكالوريا 2008 علوم تجريبية (4.5 نقط)

1 – حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بـــ z_1 و z_2 حيث : $|z_1|<|z_2|$

بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2 – المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.لتكن A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1، z_1 ، z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ وَ أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية .

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

جـــ) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة Bبتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته و نسبته.

التمرين رقم: 2 بكالوريا 2008 علوم تجريبية

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+iz-2-6i=0$$

2. نعتبرفي المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين ، A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث :

$z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3.لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_c حيث $z_c=\frac{4-i}{1+i}$.

اكتب z_c على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4.أ – برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

ب – تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـــ : $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.

التمرين رقم: 3 بكالوريا 2008 رياضيات شعبة رياضيات (5 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1.أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O و يحوّل A إلى B ثمّ عيّن زاويته ونسبته.

2. نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي: $A_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $A_{n+1}=S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n.

أ) أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 و A_1 و A_2.

ب) برهن أنّ: $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

ج)عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_nإلى المستقيم(OA_1).

3. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدّها الأول u_0 وأساسها q .

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

التمرين رقم: 4 بكالوريا 2008 رياضيات (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي :

$$P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$$

1) بين أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا.

2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

4) اكتب الحلول على الشكل الأسي.

5) لتكن A و B و C و D النقط من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب: $1+i$ و $-1+i$ و $\frac{-m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$

حيث m عدد حقيقي. عيّن m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.

التمرين رقم: 5 بكالوريا 2008 تقني رياضي (4 نقاط)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كما يلي:

$$Z^3+(2-4i)Z^2-(6+9i)Z+9(-1+i)=0 \quad \dots \quad (*)$$

1/ بيّن أن $Z_0=3i$ هو حل للمعادلة (*)

2/ حل، في $\mathbb{C}$، المعادلة (*) ثم أكتب حلولها Z_0 ، Z_1 ، Z_2 على الشكل الأسي حيث $|Z_1|<|Z_2|$.

3/ لتكن A ، B ، C صور الحلول Z_0 ، Z_1 ، Z_2 على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. عيّن النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$.

4/ عين المجموعة (E) للنقط M حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$

بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثمّ أنشئ (E).

5/ تحقق أنّ النقط O، B و G في استقامية ثمّ عيّن صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ويحول B إلى G محددا عناصره المميزة.

التمرين رقم: 6 بكالوريا 2008 تقني رياضي (4 نقاط)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z-r^2=0$$

اكتب الحلين على الشكل الأسي.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين.

عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع.

التمرين رقم: 7 بكالوريا 2009 علوم تجريبية (5 نقاط)

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z)=(Z-1-i)\left(Z^2-2Z+4\right)$ و Z عدد مركب

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$.

2) نضع: $Z_1=1+i$ ؛ $Z_2=1-\sqrt{3}i$

أ) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي.

ب) أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) أ) n عدد طبيعي.عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

التمرين رقم: 8 بكالوريا 2009علوم تجريبية (4 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+4=0$

2.نسمي z_1 ؛ z_2 حلي هذه المعادلة.

أ) أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

ب) A، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A=1-i\sqrt{3} \quad ; \quad z_B=1+i\sqrt{3} \quad ; \quad z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$)

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث : $Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

د) أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين رقم: 9 بكالوريا 2009 رياضيات (4 نقاط)

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث: $f(z)=\frac{z-i}{z-1}$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

2) لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

أ- عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عدداً حقيقيا سالباً تماما.

ب- احسب العدد المركب z_0 بحيث: $|f(z_0)|=1$ و $arg\left(f(z_0)\right)=\frac{3\pi}{2}$.

3) في المستوي المركب نعتبر النقط A ، B و C صور الأعداد المركبة 1 ، i و z_0 على الترتيب.

أ- ما نوع المثلث ABC ؟

ب- عين النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) و استنتج طبيعة الرّباعي $ACBD$.

التمرين رقم: 10 بكالوريا 2009 تقني رياضي (4 نقاط)

1) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+2=0$ حيث z هو المجهول.

ب) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z: $\left(\overline{z}+3\right)^2-2\left(\overline{z}+3\right)+2=0$

حيث $\overline{z}$ مرافق z.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

النقط A ، B ، M لواحقها $(1-i)$، $(1+i)$، z على الترتيب.

أ- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}^+$.

ب- عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $|z-1+i|=|z-1-i|$

التمرين رقم: 11 بكالوريا 2009 تقني رياضي (4 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+18=0$ .....(1)

2. ليكن العدد المركب z_1 حيث $z_1=3-3i$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

أ) اكتب z_1 على الشكل الأسي .

ب) احسب طويلة العدد z_3 وعمدة له حيث $z_1\times z_3=6(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. نعتبر في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B ، C ذات اللاحقات $3+3i$ ، $3-3i$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب

أ) عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بالرمز G_α

ب) عيّن مجموعة النقط G_α لمّا يتغيّر α في $\mathbb{R}^*$.

التمرين رقم: 12 بكالوريا 2010 علوم تجريبية (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A = 1+i$ و $z_B = 3i$.

1) اكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$.

أ) عين z_D لاحقة النقطة D.

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين رقم:14 بكالوريا 2010 علوم تجريبية (4 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثمّ اكتب الحلين على الشكل الأُسّي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3+3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.

أ - بيّن أنّ النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب - عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحوّل النقطة A إلى النقطة B.

جـ - بيّن أنّ النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D.

د - استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين رقم: 15 بكالوريا 2010 رياضيات (4.5نقطة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 9 = 0$ ... (E)

1) أ) تحقق أنّ 3 حل للمعادلة (E)، ثم عين الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث، من أجل كل عدد مركب Z فإن: $Z^3 - 3Z^2 + 3Z - 9 = (Z-3)(aZ^2 + bZ + c)$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط A و B و C صور الأعداد المركبة $Z_A = 3$ وَ $Z_B = i\sqrt{3}$ وَ $Z_C = -i\sqrt{3}$.

بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) D النقطة التي لاحقتها $Z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ وَ E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

عيّن Z_E لاحقة النقطة E.

4) F النقطة التي لاحقتها $Z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

أ) احسب $\frac{Z_F}{Z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) وَ (OF) متعامدان.

ب) عيّن Z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا.

التمرين رقم: 16 بكالوريا 2010 رياضيات (4.5 نقطة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E)\ldots\ Z^3-3Z^2+3Z-9=0$

1) أ) تحقق أنّ 3 حل للمعادلة (E)، ثم عين الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث، من أجل كل عدد مركب Z فإن: $Z^3-3Z^2+3Z-9=(Z-3)(aZ^2+bZ+c)$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط A و B و C صور الأعداد المركبة $Z_A=3$ وَ $Z_B=i\sqrt{3}$ وَ $Z_C=-i\sqrt{3}$.

بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) D النقطة التي لاحقتها $Z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ وَ E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

عيّن Z_E لاحقة النقطة E.

4) F النقطة التي لاحقتها $Z_F=1-i\sqrt{3}$.

أ) احسب $\frac{Z_F}{Z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) وَ (OF) متعامدان.

ب) عيّن Z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا.

التمرين رقم: 17 بكالوريا 2010 رياضيات

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. نسمي A، B و I النقط التي لاحقاتها على الترتيب: $Z_A=1-4i$ ، $Z_B=-1-2i$ و $Z_I=1-2i$

أ- علّم النقط A ، B و I.

ب- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z=\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}$.

جـ- ما هو نوع المثلث IAB ؟

د- C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 . احسب اللاحقة Z_C للنقطة C .

هـ- D مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$. احسب اللاحقة Z_D للنقطة D .

و- بيّن أن $ABCD$ مربع.

2. عيّن وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|$.

3. عيّن وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=1$.

التمرين رقم: 18 بكالوريا 2010 تقني رياضي (5 نقاط)

1/ حلّ، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$.

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

2/ علّم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النّقط A، C، D و I ذات اللاحقات: $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب.

3/ z عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases}arg(z-3+2i)=arg(z-1)+\frac{\pi}{2}\\|z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$

أ- بين أن الجملة تكافئ : $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$ ثم عين قيمة z.

ب- B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$، تحقق أنّ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$؟

جـ- لتكن J النّقطة التي لاحقتها z_J حيث: $z_J=1-2i$.

اكتب على الشكل الأسي العدد المركّب Z حيث: $Z=\frac{z_A-z_I}{z_B-z_J}$.

تحقّق أنّ: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$؟

التمرين رقم: 19 بكالوريا 2010 تقني رياضي (5 نقاط)

1) أ – اكتب على الشكل الأسي العدد المركّب a حيث: $a=-2+2i\sqrt{3}$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

ب– حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z : $Z^2=-2+2i\sqrt{3}$

2) ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A و B و C النّقط التي لاحقاتها $Z_A=-2$ و $Z_B=-1-\sqrt{3}\,i$ و $Z_C=1+\sqrt{3}\,i$ على التّرتيب.

أ– احسب طويلة العدد المركّب $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ وعمدة له.

ب– استنتج طبيعة المثلّث ABC .

3) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $arg(\overline{z}+2)=\frac{\pi}{3}$.

أ– تحقق أن B تنتمي إلى (E).

ب– عين المجموعة (E).

التمرين رقم: 20 بكالوريا 2011 علوم تجريبية (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1. أ - إكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب - عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له ؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

2. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=iz-1-i$$

أ - عيّن طبيعة التحويل T محدّدا عناصره المميّزة.

ب - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T.

3. لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$.

أ - بين أن النقاط A ، C و D في استقامية.

ب - عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحوّل النقطة C إلى النقطة D.

جـ - عيّن العناصر المميّزة للتشابه S الذي مركزه A و يحوّل B إلى D

التمرين رقم: 21 بكالوريا 2011 علوم تجريبية (4 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$.

1. أ - علّم النقط A ، B و C.

ب - ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك.

جـ - عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2. عيّن ثمّ أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقّق: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$.

3. أ - حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-6z+13=0$

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة.

ب - لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركّب z .

- عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|z-z_0|=|z-z_1|$.

التمرين رقم: 22 بكالوريا 2011 رياضيات (4.5 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1-i$ ، $z_B=-1+i$ ، $z_C=\sqrt{3}(1+i)$

1/ اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B ، z_C.

2/ أ/ احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثم فسّر هندسيا النتائج المحصل عليها.

ب/ حدّد طبيعة المثلث ABC.

3/ عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معينا.

4/ T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(-1+i)z+1-3i$

أ/ عين طبيعة التحول T وعناصره المميزة.

ب/ استنتج طبيعة التحول ToT وعناصره المميزة.

التمرين رقم: 23 بكالوريا 2011 تقني رياضي (4 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E)\ldots\ldots z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)، ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقاط A، B، C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ ، $z_C=\sqrt{3}-i$، نضع: $L=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

أ) اكتب L على الشكل الأسي.

ب) أثبت أن: $z_A-z_B=L(z_C-z_B)$، ثم استنتج أن A صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتحديد عناصره المميزة.

ج) استنتج نوع المثلث ABC ثم احسب مساحته S.

التمرين رقم: 24 بكالوريا 2011 تقني رياضي (4 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

L العدد المركب المعرف كما يلي: $L=\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$.

1/ أ) اكتب L على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

ب) بيّن أن: $L^{12}+1=0$ ، ثم احسب: $\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+(5+3i)^{12}$.

ج) n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي أثبت أن: $L^{4n}+L^{4p}=0$.

2/ أ) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=5+3i$ و $z_B=5-3i$ عيّن اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

ب) عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA' .

التمرين رقم:25 بكالوريا 2012 علوم تجريبية (4 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

(حيث $z\neq 2-3i$).

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث : $z_A=1+i\sqrt{5}$ و $z_B=1-i\sqrt{5}$.

- تحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$.

النقط C، D، E لواحقها على الترتيب: $z_C=-2i$، $z_D=2-3i$ و $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

ب- استنتج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ).

التمرين رقم: 26 بكالوريا 2012 علوم تجريبية (5 نقاط)

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$.

أ- تحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z)=(z-6)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B ، C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$.

أ-اكتب كلاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب-اكتب العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

جـ-استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب- عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ- بيّن أنّ النقط A ، B ، A' في استقامية.

التمرين رقم: 27 بكالوريا 2012 رياضيات (4 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2-\sqrt{2}z+1=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=z_A+z_B$.

أ- اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A، z_B و $\dfrac{z_A}{z_B}$.

ب- عيّن لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

جـ- بيّن أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

3) نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z-z_B|=|z-z_A|$.

أ- بيّن أن (Δ) هو محور الفواصل.

ب- بيّن أن حلي المعادلة: $\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين)

التمرين رقم: 25 بكالوريا 2012 شعبة رياضيات (4 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ و $z_D=\overline{z_C}$.

- بيّن أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A، B، C و D.

3) نرمز بـ z_E إلى لاحقة النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O .

أ- بيّن أن: $\dfrac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

ب- بيّن أن النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C يطلب تعيين زاويته.

جـ- استنتج طبيعة المثلث AEC.

د- H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

- عيّن طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH.

التمرين رقم: 26 بكالوريا 2012 تقني رياضي (6 نقاط)

1- عيّن العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث: $\begin{cases} 2z_1+3z_2=9-2i \\ 3z_1-z_2=8+8i \end{cases}$

2- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و Ω التي لاحقاتها على الترتيب z_A، z_B و z_Ω حيث: $z_A=3+2i$ ، $z_B=-3$ و $z_\Omega=1-2i$.

أ) أثبت أنّ: $z_B-z_\Omega=i(z_A-z_\Omega)$.

ب) عيّن طبيعة المثلث ΩAB.

3 h هو التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2 .

أ) عيّن الكتابة المركبة للتحاكي h.

ب) عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h.

ج) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$.

د) بيّن أن $ABCD$ مربع.

4- (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$

أ) تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E)، ثم عيّن طبيعة (E) وعناصرها المميزة.

ب) أنشئ المجموعة (E).

التمرين رقم: 27 بكالوريا 2012 تقني رياضي (5 نقاط)

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z:

$$\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$$

2- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A، B، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ ، $z_C=-1-i\sqrt{3}$ و $z_D=-1+i\sqrt{3}$.

أ) اكتب كلا من z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي.

ب) تحقق أنّ: $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

3- z_n العدد المركب الذي طويلته $\dfrac{1}{2^n}$ و $\dfrac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث n عدد طبيعي.

L_n العدد المركب المعرف بـ: $L_n=z_D\times z_n$.

أ) اكتب كلا من L_0 ، L_1 على الشكل الجبري.

ب) (U_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $U_n=|L_n|$

- أثبت أنّ المتتالية (U_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

M_0 ، M_1 ،...، M_n ،... صور الأعداد المركبة L_0 ، L_1 ، ... ، L_n على الترتيب.

احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n=\left\|\overrightarrow{OM_0}\right\|+\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|+\ldots+\left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$.

- جد نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين رقم: 28 بكالوريا 2013 علوم تجريبية (5 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:
(I).....$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$؛ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2. بيّن أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B و C.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، ثمّ استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.

جـ) عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ G.

د) احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين رقم: 29 بكالوريا 2013 علوم تجريبية (04.5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: (E) ..... $z^2+4z+13=0$

1) تحقّق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثمّ جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ) بيّن أن: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

ب) احسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

3) لتكن النقطة D ، حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

أ) بيّن أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب) احسب z_D لاحقة النقطة D.

ج) بيّن أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACD.

التمرين رقم: 30 بكالوريا 2013 رياضيات (06 نقاط)

التمرين الأوّل: (06 نقاط)

I) a و b عددان حقيقيان موجبان تماما. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها: $z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B = -a\sqrt{2}$ ، $z_C = \overline{z_A}$ و $z_E = be^{i\frac{3\pi}{2}}$ على الترتيب.

1. أ - اكتب على الشّكل الأسّي العدد المركّب $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلّث OAB.

ب - حدّد طبيعة الرباعي $OABC$، ثمّ استنتج مساحته.

2. التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$، يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$

أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S، ثمّ تحقق أنّ $S(A) = E$.

ب - بيّن أنّ مساحة الرباعي $OEFG$ هي b^2 (مقدرة بوحدة المساحة)، حيث $S(B) = F$ و $S(C) = G$.

3. أ- احسب بدلالة a و b العبارة: $|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E|\cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right]$.

ب- استنتج قيمة CE^2 بدلالة a و b.

II) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن O، لاحقتها z_n.

نضع: $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين، من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $u_n = |z_n|$ و $v_n = \arg(z_n)$.

1. اكتب العدد المركّب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشّكل الأسّي بدلالة a و b.

2. نفرض أنّ : $a < b$ و $\arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) \in]-\pi;\pi]$.

بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية، والمتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين أساس وحساب الحد الأوّل لكل منهما.

3. احسب، بدلالة a ، b و n المجموع T_n، حيث : $T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \ldots + \frac{b^n}{a^{n-1}}$، ثمّ $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

4. عيّن قيّم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقط O ، A و M_n في استقامية.

التمرين رقم: 31 بكالوريا 2013 رياضيات (05 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z، التالية: $z^2+z+1=0$.

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$؛ النقط A، B و M ذات اللاّحقات:

$z_A=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$، $z_B=\overline{z}_A$ و z على الترتيب. (يرمز $\overline{z}_A$ إلى مرافق z_A)

أ - أُكتب z_A على الشّكل الأسّي.

ب - عيّن مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg\left[(z-z_A)^2\right]=\arg(z_A)-\arg(z_B)$.

3. أ - التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=z_A\cdot z+z_B\sqrt{3}$.

- ما طبيعة التحويل r؟ عيّن عناصره المميزة.

ب - التحاكي h، يرفق بكلّ نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=-2z+3i$.

- عيّن نسبة ومركز التحاكي h.

جـ - نضع: $S=h\circ r$. (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).

- عيّن طبيعة التّحويل S، مبرزاً عناصره المميزة، ثمّ تحقّق أنّ عبارته المركّبة هي: $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C، D و E؛ حيث: $S(O)=C$، $S(C)=D$ و $S(D)=E$.

- بيّن أنّ النقط O، Ω و E في استقامية.

5. أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث : $z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

ب - عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S.

التمرين رقم: 32 بكالوريا 2013 تقني رياضي (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2+6z+17=0$.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-4$ و $z_B=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$ و $z_C=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i$.

– احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) أ) عيّن z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتّى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A .

ب) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\|=10\sqrt{2}$.

4) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z+4)=\dfrac{\pi}{4}$.

– تحقّق أنّ النقطة B تنتمي إلى (Γ_2)، ثمّ عيّن المجموعة (Γ_2) .

التمرين رقم: 33 بكالوريا 2013 تقني رياضي (04.5 نقطة)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(z+5-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A و B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=-1-i\sqrt{3}$ و $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-5+i\sqrt{3}$.

S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O إلى B .

– جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ، ثمّ عيّن العناصر المميزة له .

3) أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$.

ب) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABD .

جـ) عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$