

BAC 2014

الدوال اللوغاريتمية

بكالوريا الشعب العلمية المشتركة

2013-2008

من إعداد: قليل محمد

التمرين رقم: 1 بكالوريا 2009 علوم تجريبية (7 نقاط)

الجزء الأول:

$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$ دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: لتكن f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانياً.

ب) باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

جـ) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

د) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. أرسم (C_f) .

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمتان التي معادلتهما:

$$y = x-1 \quad ; \quad x=0 \quad \text{و} \quad x=1$$

التمرين رقم: 2 بكالوريا 2009 تقني رياضي (7 نقاط)

g دالة معرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x + \ln x$.

أ) احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ فإن $g(x) \neq 0$.

د) لتكن f دالة معرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{6 \ln x}{2x + \ln x}$

أ) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{x}{2 + \frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x \in [1; +\infty[$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f

د) شكل جدول تغيرات f ، ما هي قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متميزين؟

هـ) جد معادلة للمماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 حيث (C_f) يرمز إلى التمثيل البياني

للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

3. نعتبر الدالة h المعرفة على $[1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = f(e^x)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) شكل جدول تغيرات الدالة h .

ب) جد معادلة للمماس (Δ_2) للمنحنى (C_h) عند النقطة التي فاصلتها 1.

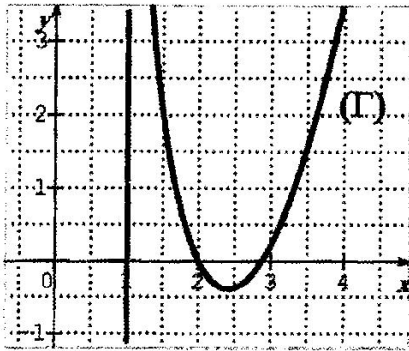
ج) أرسم كلا من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (C_f) و (C_h) في نفس المعلم السابق.

التمرين رقم: 3 بكالوريا 2010 تسيير و اقتصاد (4 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري)
- (1) أ) حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.
 - ب) حلّ $f(x)$ إلى جداء عاملين.
 - ج) حل في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة: $2\ln(x) + 2 \geq 0$
 - (2) أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .
 - (3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها.

التمرين رقم: 4 بكالوريا 2010 تسيير و اقتصاد (9 نقاط)

- (I) لنكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$ ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري). (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس كما هو في الشكل التالي:



- (1) بقراءة بيانية، عيّن عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$.
 - (2) احسب $g(2)$.
 - (3) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث: $2,87 < \alpha < 2,88$.
 - (4) استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ في المجال $]1; +\infty[$.
- (II) لنكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ:
- $$f(x) = x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أ- أوجد نهاية الدالة f عند $+\infty$. (لاحظ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)
 - ب- احسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.
 - ج- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
 - د- أوجد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f) .
 - هـ- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
 - (2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1; +\infty[$ لدينا:
- $$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}, \quad (f' \text{ هي الدالة المشتقة للدالة } f).$$
- ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- (3) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) = 3,9$)
- (4) أ- عين مشتقة الدالة: $\ln(x-1) \mapsto x$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.
- ب- احسب: $\int_2^5 f(x) dx$ ، فسّر النتيجة هندسيا.

التمرين رقم: 5 بكالوريا 2010 علوم تجريبية (10 نقاط)

(I) لنكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$.

(2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

(4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

حيث: a, b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية $\ln$

ثم ارسم (C) و (C_f) .

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = -\infty$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) احسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ حلا وحيدا α .
تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left] \frac{1}{2}; 5 \right]$ في المعلم السابق.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\alpha[; 1]$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $\alpha[; 1]$.

(III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$

(1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$.

(2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين رقم: 6 بكالوريا 2010 رياضيات (7 نقاط)

g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - 1 - 2\ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول هي $4cm$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2- أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة g .

ج- احسب $g(1)$.

د- برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث: $3,5 < \alpha < 3,6$.

هـ- استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x$; $x > 0$
 $f(0) = 0$

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ج- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

د- شكل جدول تغيرات الدالة f ، بين أن: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

4- ارسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0; 3]$.

التمرين رقم: 7 بكالوريا 2010 رياضيات مكفوفين (10 نقاط)

(I) لنكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(2x - 1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

(3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة

$$y = x, \text{ ثم اكتب معادلة له.}$$

(4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = \ln(x + a) + b \text{ حيث: } a, b \text{ عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.}$$

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية $\ln$

(لا يطلب رسم (C) و (C_f)).

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ، ثم حدّد القيمة الحدية لها.

(3) احسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ حلا وحيدا α .

تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

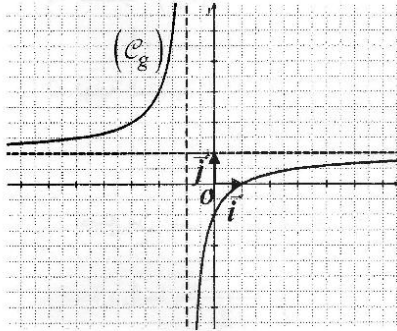
(5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\alpha; 1]$ ، $f(x)$ ينتمي إلى المجال $[\alpha; 1]$

(III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$

(1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$

(2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

التمرين رقم: 8 بكالوريا 2011 علوم تجريبية (7 نقاط)



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل) ، بقراءة بيانية:
أ - شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب - حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$.

ج - عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.

2. أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.
ب - احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ - باستعمال الجزء (I) السؤال ج - ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1; +\infty[$.
ب - α عدد حقيقي.

بيّن أنّ الدالة $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $[\alpha; +\infty[$.

ج - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

التمرين رقم: 9 بكالوريا 2011 رياضيات (7 نقاط)

1/ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + \ln x^2 - 1$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0; +\infty[$

2/ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (1 - \frac{1}{x^2})\ln x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب بالمعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ/ بين أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وأن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ln x$ ، ماذا تستنتج ؟

- ارسم (δ) و (C_f) .

3/ أ/ x عدد حقيقي من المجال $]1; +\infty[$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t dt$

- تحقق أن : $x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]1; +\infty[$.

- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

ب/ α عدد حقيقي أكبر تماماً من 1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (δ) والمستقيمين

اللذين معادلتيهما : $x = \alpha$ و $x = 1$ ، ثم احسب $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

التمرين رقم: 10 بكالوريا 2011 تقني رياضي (6 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{a+b \ln 2x}{4x^2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان و (C_f)

المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ عيّن a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ للمنحنى (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل.

2/ الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1+2 \ln 2x}{4x^2}$ و (C_g) المنحنى الممثل لها في

المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ، فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) حل في $]0; +\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$.

د) أنشئ (C_g) .

3/ أ) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{1 + \ln 2x}{2x}$. احسب $h'(x)$.

ب) تحقق أن: $g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

التمرين رقم: 11 بكالوريا 2012 تسيير و اقتصاد (6 نقاط)

التمرين الرابع: (06 نقاط)

التمثيل البياني (C_f) المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$

بالعبارة: $f(x) = ax + b + cx \ln x$ حيث a, b, c أعداد حقيقية.

1) خمن بقراءة بيانية اتجاه تغير f ونهاية f عند $+\infty$.

2) أ- أحسب بدلالة a و c عبارة $f'(x)$ حيث f' هي الدالة

المشتقة للدالة f على $[1; +\infty[$.

ب- باستعمال معطيات في الشكل، وعلمنا أن $f(5) = 16 - 10 \ln 5$.

- بيّن أن: $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln x$.

ج- تحقق من صحة تخمينك في السؤال 1، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

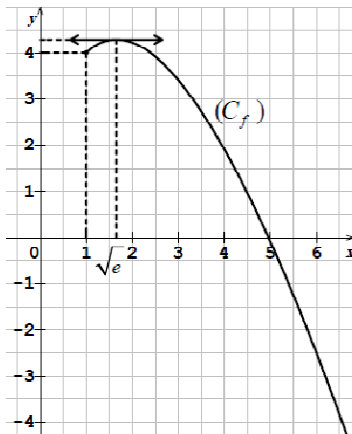
3) بيّن أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $[1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $4,95 < \alpha < 4,96$.

4) نعرف العدد الحقيقي S كما يلي: $S = \int_1^{\alpha} f(x) dx$ (حيث α هو حل المعادلة $f(x) = 0$).

أ- بيّن أن الدالة: $g: x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$ دالة أصلية للدالة f على $[1; +\infty[$.

ب- أعط تفسيرا هندسيا للعدد S ، ثم احسبه بدلالة α .

ج- بيّن أن: $S = \frac{1}{2} \alpha(\alpha + 1) - 3$ ، ثم استنتج حصرا للعدد S .



التمرين رقم: 12 بكالوريا 2012 علوم تجريبية (7 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $] -\infty; 0[$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $] -\infty; 0[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3 أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4 بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3,5 < \alpha < -3,4$ و $-1,1 < \beta < -1$.

5 أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

6 أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

7 لتكن g الدالة المعرفة على $] -\infty; 0[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6 \ln(1-x)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $] -\infty; 0[$.

التمرين رقم: 13 بكالوريا 2012 علوم تجريبية (8 نقاط)

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) g هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3[$ كما يلي : $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بيّن أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

(3) عيّن، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

(4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3[$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب- عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h .

(II) f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}$; $x \neq 0$ ، $f(0) = 0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

(2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]0; 3[\cup]-1; 0[$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب- بيّن أن : $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصرًا لـ $f(\alpha)$.

ج- احسب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1; 3[$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

(4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

(5) ارسم (T)، (T') و (C_f).

(6) ناقش بيانًا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

التمرين رقم: 14 بكالوريا 2012 رياضيات (8 نقاط)

I g هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ كما يلي : $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

- (1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (2) بيّن أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8 < \alpha < -0,7$.
- (3) عيّن، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

(4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب- عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h .

II f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ كما يلي:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(x+1)} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- (2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]0; 3]$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب- بيّن أن: $f'(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصرا لـ $f'(\alpha)$.

ج- احسب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1; 3]$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

(4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

(5) ارسم (T) ، (T') و (C_f) .

(6) ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

التمرين رقم: 15 بكالوريا 2012 تقني رياضي (7 نقاط)

I g هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + a + b \ln(x)$ حيث a و b عددان حقيقيان.

1- عيّن a و b علما أن التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(1; -1)$ مماسا معامل توجيهه 4.

2- نضع $a = -2$ و $b = 2$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; +\infty[$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

II f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ب) احسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ج) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2- أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 2$ مقارب لـ (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

ب) بيّن أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، ثم جد معادلة له.

ج) نأخذ $\alpha = 1,25$. بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث:

$0,6 < x_1 < 0,7$ و $2,7 < x_2 < 2,8$ ، ثم ارسم كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) .

3- ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $(m+2)x + 2\ln(x) = 0$.

التمرين رقم: 16 بكالوريا 2013 علوم تجريبية (07 نقاط)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm)

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسر النتيجة بيانياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بيّن أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة : $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

ج) عيّن بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلّين متميزين .

التمرين رقم: 17 تقني رياضي 2013

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن:

$$\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

(3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II - الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

(2) أثبت أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) بين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(5) مثل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

III- (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

(1) أثبت أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

(2) الدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

(أ) بين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

(ب) عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

(ج) بين أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

التمرين رقم: 18 تقني رياضي 2013

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I - الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.

(1) ادرس تغيرات g .

(2) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

II - الدالة f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(1 - أ) بين أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2 - أ) تحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

III - n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$; f_n الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على $]0; +\infty[$.

2- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

4- بين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.

5- أ) بين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3; 0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

(ب) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي

وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6- أ) بالاعتماد على الجزء II؛ بين أنه، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

(ب) استنتج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

(ج) جد نهاية المتتالية (α_n) .