مســائل محلولة من الكتاب المدرسي

مسألة رقم 111 الكتاب المدرسي صفحة 36

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I,J)$.

1) أ) عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

ب) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq1$: $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f و المستقيم (d) الذي معادلته $y = x - 2$ ؟ برر.

ج) حدّد وضعية C_f بالنسبة لـ (d)، لتكن A نقطة تقاطع C_f و (d).

3) ارسم C_f و (d).(تؤخذ الوحدة $2cm$ على (Ox) و $1cm$ على (Oy)).

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$.

- استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α.

5) بين أن للمنحني C_f يقبل مماس (T) يوازى و المستقيم (d) عند *نقطة يطلب أداثياتها*

- *أكتب معادلة المماس* (T)

- بين ان استنتج بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث m وسيط حقيقي.

6) أ) نريد إيجاد نتيجة السؤال 5) باستعمال الحساب

بين أن فواصل نقط تقاطع المنحني C_f مع المستقيم الذي معادلته $y = x + m$ هي حلول المعادلة (E) التالية:

$$(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$$

ب) جد حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E).

الحل

الدالة f المعرفة على $D_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$

بمأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(x^3-4x^2+8x-4\right)=1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}(x-1)^2=0^+\end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=+\infty$

بمأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left(x^3-4x^2+8x-4\right)=1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}(x-1)^2=0^+\end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$

ومنه فإن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ هو مستقيم مقارب يوازى محور التراتيب .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال D_f و دالتها المشتقة f' هي

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2\left(x^3-4x^2+8x-4\right)'-\left((x-1)^2\right)'\left(x^3-4x^2+8x-4\right)}{\left((x-1)^2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2\left(3x^2-8x+8\right)-2(x-1)\left(x^3-4x^2+8x-4\right)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left[(x-1)\left(3x^2-8x+8\right)-2\left(x^3-4x^2+8x-4\right)\right]}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left[3x^3-8x^2+8x-3x^2+8x-8-2x^3+8x^2-16x+8\right]}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left[x^3-3x^2\right]}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^4}$$

إشارة المشتقة من إشارة البسط أي $x^2(x-1)(x-3)$

ومنه $f'(x)=0$ يعني أن $x^2(x-1)(x-3)=0$

أي $x^2\left(x^2-3\right)=0$

وبتالى $\begin{cases} x^2=0 \\ x-3=0 \\ (x-1)=0 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=1 \end{cases}$

جدول الإشارة المشتقة

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		+	0	+		+		+	
$(x-3)(x-1)$		+		+	0	-	0	+	
$f'(x)$		+	0	+	||	-	0	+	

لدينا $f'(x) < 0$ إذا كان $x \in]1;3[$ و f متناقصة تماما على المجال $]1;3[$.

لدينا $f'(x) \geq 0$ إذا كان $x \in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ و f متنزايدة تماما على المجالين $]-\infty;1[$ و $]3;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	||	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

ملاحظة

المشتقة الأولى تنعدم ولا تغير إشارتها عند 0 و منه المنحنى C_f يقبل نقطة إنعطاف إحداثياتها $(0;-4)$

أكتب معادلة للمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

و بمأن $f'(0)=0$ و $f(0)=-4$

ومنه معادلة المماس هي $y = 0(x-0)-4$.

أي $y = -4$

2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$: $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$

لدينا

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)^2(ax+b) + cx + d}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{(x^2-2x+1)(ax+b) + cx + d}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + (b-2a)x^2 + (a+c-2b)x + b + d}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-4 \\ a+c-2b=8 \\ b+d=-4 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=1 \\ b-2=-4 \\ 1+c-2b=8 \\ b+d=-4 \end{cases}$ و بتالي $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \\ d=-2 \end{cases}$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$: $f(x) = x - 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$

4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) يكافيء

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-2)]=0$

وبمأن

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-(x-2)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}\right] = 0$$

ومن جهة أخرى

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-(x-2)\right]$$

وبمأن

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}\right]=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائلا للمنحني (C_f).

أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

ندرس إشارة الفرق $(f(x)-y)$.

$$f(x)-y=f(x)-(x-2)$$

$$f(x)-y=\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

إشارة الفرق من إشارة ا $3x-2$

جدول الإشارة

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$6x-2$		-	0	+	||	+	
$f(x)-y$		+	0	-	||	+	

تكون $f(x)-y<0$ إذا كان $x\in\left]\frac{2}{3};1\right[$ والمنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

تكون $f(x)-y>0$ إذا كان $x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ والمنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

تكون $f(x)-y=0$ إذا كان $x=\frac{2}{3}$ والمنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) فى النقطة ذات افحداثيات $\omega\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$

ملاحظة

للإيجاد ترتيب نقطة التقاطع (C_f) و (Δ) نعوض فى الدالة أو فى المستقيم (Δ) الذى ندرس الوضعية معه.

(بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1[$ يطلب إيجاد، باستعمال حاسبة بيانية، حصر له سعته $0,01$.

بمأن الدالة مستمرة و رتيبة على المجال $]-\infty;1[$ و تأخذ قيمها في $]-\infty;+\infty[$ و العدد 0 ينتمي إلى المجال $]-\infty;+\infty[$ ومن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α على المجال $]-\infty;1[$ يحقق $f(\alpha)=0$

حصر للعدد α سعته $0,01$. نستعين بالجدول التالي

x	0.66	0.67	0.68	0.69	0.70	0.71
$f(x)$	−1.54	−1.21	−0.93	−0.58	−0.19	0.26

ومنه نستنتج أن الحصر المطلوب هو $0,70<\alpha<0,71$

7) بين أن للمنحنى C_f يقبل مماس (T) يوازي و المستقيم (d) عند نقطة يطلب حأداثياتها

C_f يقبل مماس (T) يوازي و المستقيم (d) يعني $f'(x)=1$

$$\frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^4}=1$$

$$\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=1$$

لدينا $f'(x)=1$ يعن $x^3-3x^2=x^3-3x^2+3x-1$

$$3x-1=0$$

$$x=\frac{1}{3}$$

ومنه C_f يقبل مماس (T) يوازى المستقيم (d) عند النقطة $A\left(\frac{1}{3};f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

أكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $A\left(\frac{1}{3};f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

$$y=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

و بمأن $f'\left(\frac{1}{3}\right)=1$ و $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{47}{12}$

ومنه معادلة المماس هي $y=1\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{47}{12}$.

أي $y=x-\frac{17}{4}$

8)- بين ان استنتج بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث m وسيط حقيقي.

نناقش نقاط تقاطع المنحنى C_f و المستقيم (Δ) حيث $(\Delta): y = x + m$

اذا كان $m \in \left]-\infty; -\frac{17}{4}\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول

اذا كان $m = -\frac{17}{4}$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد $x = \frac{1}{3}$

اذا كان $m \in \left]-\frac{17}{4}; -2\right[$ فإن المعادلة تقبل حلان متمايزان

اذا كان $m = -2$ فإن المعادلة تقبل واحد $x = \frac{2}{3}$

اذا كان $m \in]-2; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل ثلاثة حلول .

(أ) نريد إيجاد نتيجة السؤال 5) باستعمال الحساب

بين أن فواصل نقط تقاطع المنحنى C_f مع المستقيم الذي معادلته $y = x + m$ هي حلول المعادلة (E) التالية:

$$(m+2)x^2 - (2m+7)x + m + 4 = 0$$

فواصل نقط تقاطع المنحنى C_f مع المستقيم الذي معادلته $y = x + m$ يعنى $f(x) = x + m$

$f(x) = x + m$ يعنى $x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2} = x + m$

$$\frac{3x - 2}{(x-1)^2} = 2 + m$$

$$3x - 2 = (2 + m)(x^2 - 2x + 1)$$

ومنه

$$(2 + m)x^2 - 2(2 + m)x + 2 + m - 3x + 2 = 0$$

$$(2 + m)x^2 - (7 + 2m)x + 4 + m = 0$$

ومنه فواصل نقط تقاطع المنحنى C_f مع المستقيم الذي معادلته $y = x + m$ هي حلول المعادلة (E) التالية:

$$(m+2)x^2 - (2m+7)x + m + 4 = 0$$

ب) جد حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E).

الحالة الأولى

إذا كان $m = -2$ فإن حلول المعادلة (E) هى حلول المعادلة $-3x+2=0$ ومنه $x=\frac{2}{3}$.

الحلة الثانية

إذا كان $m \neq -2$ فإن المعادلة (E) هى المعادلةمن الدرجة الثانية نحسب المميز Δ

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac$ حيث $c = (m+4)$ $b = (m+2)$ $a = (2m+7)$

لدينا

$$\Delta = (2m+7)^2 - 4(m+2)(m+4)$$
$$\Delta = 4m^2 + 49 + 28m - 4m^2 - 24m - 32$$
$$\Delta = 4m + 17$$

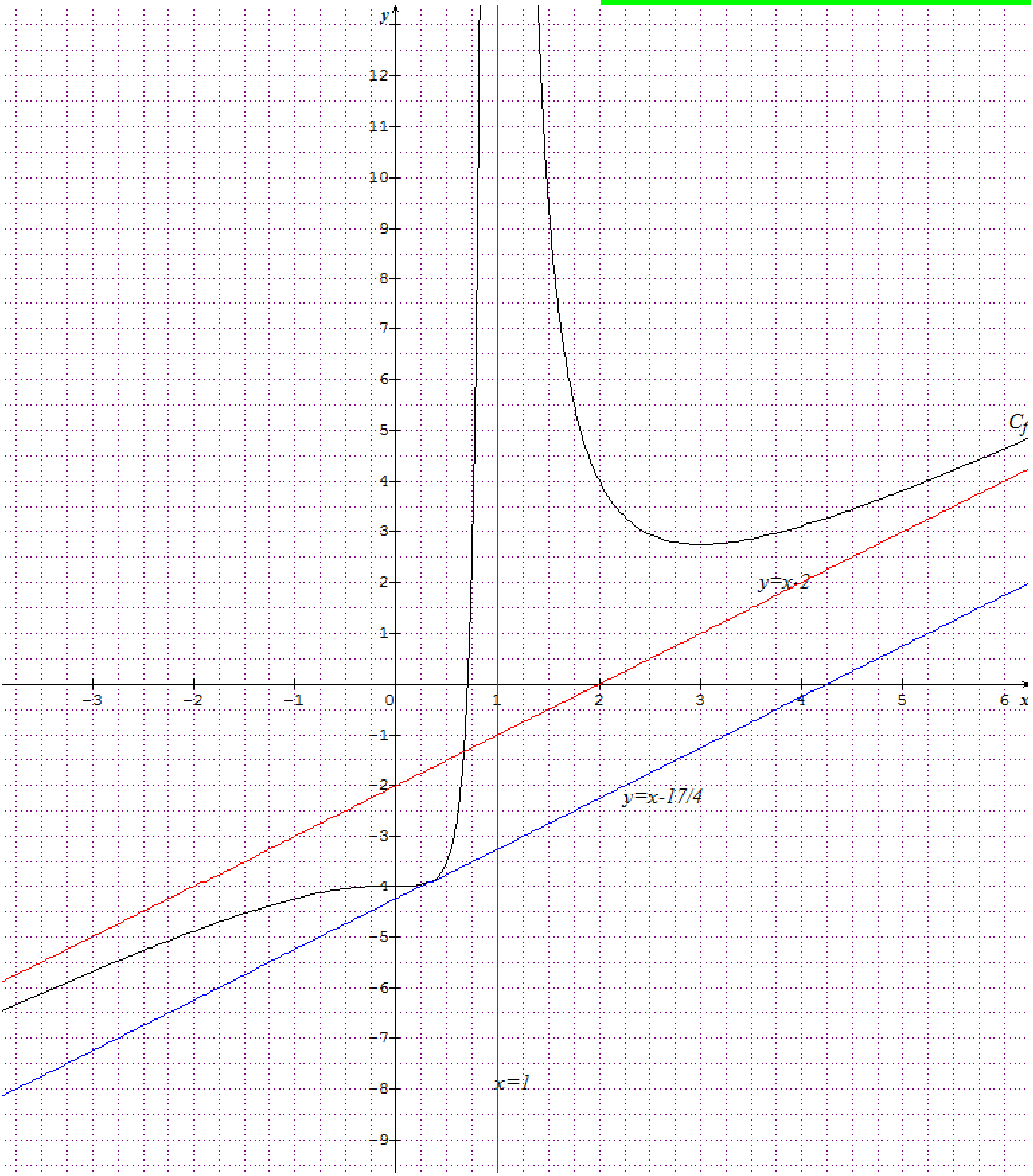
ندرس إشارة المميز Δ

اولا $\Delta < 0$ يعنى $4m+17<0$ أى $m < -\frac{17}{4}$ و معادلة (E) لا تقبل حلول

ثانيا $\Delta > 0$ يعنى $4m+17>0$ أى $m > -\frac{17}{4}$ و معادلة (E) تقبل حلان متمايزان

هما
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2m+7-\sqrt{4m+17}}{2(m+2)} \\ x_2 = \dfrac{2m+7-\sqrt{4m+17}}{2(m+2)} \end{cases}$$

أرسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).



إنتهى بحمد الله
والله الموفق