في كل ما يأتي، نفرض أنّ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1)كيفيّة إثبات توازي أو عدم توازي شعاعيْن:

*لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ متوازيان يكفي أن نثبت أنّ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$.

ملاحظة1: إذا انعدمت α' أو β' أو γ' فلا تُكتب النسبة التي انعدم مقامها، وَ نشترط أن تنعدم المركّبة التي تقابل المركّبة المعدومة في الشعاع الآخر حتى نحافظ على توازي الشعاعيْن.

*لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ غيْر متوازييْن، يكفي أن نثبت أنّ التناسب $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ غير محقق ولوْ بِعَدَمِ تساوي نسبتيْن منه.

ملاحظة2: يمكن أيضا أن نبيّن أنّ الشعاعيْن $\vec{u}$ وَ $\vec{u'}$ متوازيان بإثبات وجود عدد حقيقي t يحقق $\vec{u}=t\vec{u'}$.

☑ تطبيق: اذكر ما إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيْن أم لا مع التعليل:

ا) $\vec{u}(-1,3,2)$ ؛ $\vec{v}(2,-6,-4)$. ب) $\vec{u}(2,0,1)$ ؛ $\vec{v}(1;0;0,5)$.

جـ) $\vec{u}(2,1,-1)$ ؛ $\vec{v}(-6,3,-3)$. د) $\vec{u}(2,0,0)$ ؛ $\vec{v}(7,0,0)$.

2)كيفيّة إثبات استقاميّة أو عدم استقاميّة ثلاث نقط:

*لإثبات أنّ النقط A، B، C في استقاميّة يكفي أن نثبت- مثلا- أنّ $\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{AC}$.

*لإثبات أنّ النقط A، B، C ليست في استقاميّة يكفي أن نثبت - مثلا- أنّ $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ ⁂.

☑ تطبيق: اذكر، في كل حالة، ما إذا كانت النقط A، B، C في استقاميّة مع التعليل: ا) $A(1,1,0)$، $B(2,1,1)$، $C(-1,2,-1)$.

ب) $A(2,1,-1)$، $B(3,1,0)$، $C(4,1,1)$.

3)كيفيّة إثبات أنّ ثلاث نقط تعيّن مستويا:

*لإثبات أنّ النقط A، B، C تعيّن مستويا يكفي أن نثبت أنّها ليست في استقاميّة أيْ أنّ $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ ⁂ - مثلا- .

☑ تطبيق: تحقق أنّ النقط $A(1,1,-1)$، $B(0,1,2)$، $C(2,1,1)$ تعيّن مستويا.

4)كيفيّة إثبات تعامد أو عدم تعامد شعاعيْن:

*لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ متعامدان يكفي أن نثبت أنّ $\vec{u}\vec{u'}=0$ أيْ $\boxed{\alpha.\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'=0}$.

*لإثبات أنّ الشعاعيْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ غير متعامديْن يكفي أن نثبت أنّ $\boxed{\alpha.\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'\neq 0}$.

☑ تطبيق: هل الشّعاعان $\vec{u}(2,1,3)$ و $\vec{v}(0,3,-1)$ متعامدان؟

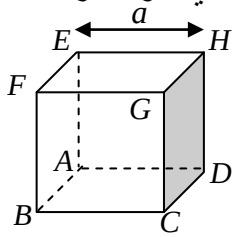
5)استخدام خاصّة الإسقاط لحساب الجداء السّلّمي لشعاعيْن:

A، B نقطتان من المستوي (P) و C نقطة لا تنتمي إلى (P)

لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$

حيث C' المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P).

☑ تطبيق: ليكن المكعب $ABCDEFGH$ الذي طول حرفه a.



1) احسب الجداء السّلّمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GE}$.

2) احسب الجداء السّلّمي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{GC}$.

3) نختار المعلم المتعامد والمتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

ا-عيّن إحداثيّات كلّ رؤوس هذا المكعّب.

ب-أجبْ الآن بطريقة تحليليّة عن السّؤاليْن1) و 2).

6)المعادلة الدّيكارتيّة لمستوٍ:

كلّ مستوٍ في الفضاء له معادلة ديكارتيّة من الشكل:

$\boxed{ax+by+cz+d=0}$ حيث a، b، c ليست كلّها معدومة.

$\vec{n}(a;b;c)$ يسمّى شعاعا **ناظميّا** (عموديّا) على هذا المستوي.

ملاحظة:لتعيين شعاع ناظمي للمستوي (P) ،يكفي أنْ نعيّن شعاعا عموديّا على شعاعيْن غير متوازييْن من (P) .

7)كيفيّة تعيين معادلة ديكارتيّة لمستوٍ معيّن بثلاث نقط:

لتعيين معادلة ديكارتيّة للمستوي (P) المعيَّن بالنقط A، B، C نبحث عن شعاع ناظمي $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي (P) وذلك بحل الجملة التالية $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$، و بعْد تعيين a، b، c تكون معادلة المستوي (P) من الشكل $ax+by+cz+d=0$، ثم يتمّ تعيين d بتعويض إحداثيّات إحدى النقط A، B، C في المعادلة.

☑ تطبيق:تحقق أنّ النقط $A(-1,0,1)$، $B(1,2,-1)$، $C(0,3,1)$ تعيّن مستويا ، ثمّ اكتب معادلة ديكارتيّة لهذا المستوي.

تنبيه هام : إذا طُلِب منّا أنْ نبيّن أنّ النقط A، B، C تعيّن مستويا (P) معرّفا بمعادلته، فيكفي أنْ نبيّن أنّ إحداثيّات كلٍّ من هذه النقط تحقق معادلة المستوي (P).

☑ تطبيق: $A(1,1,0)$، $B(2,1,1)$، $C(-1,2,-1)$ ثلاث نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة.

بيّن أنّ معادلة المستوي (ABC) هي : $x+y-z-2=0$.

8)مستويات خاصّة:

☑ $z=0$. هي معادلة ديكارتية للمستوي $(O;\vec{i};\vec{j})$.

☑ $x=0$. هي معادلة ديكارتية للمستوي $(O;\vec{j};\vec{k})$.

☑ $y=0$. هي معادلة ديكارتية للمستوي $(O;\vec{i};\vec{k})$.

9)بُعْد نقطة عن مستوٍ:

بُعْد النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي (P) ذي المعادلة $ax+by+cz+d=0$ تُحسب بالدّستور التالي:

$$\boxed{d(M_0,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

☑ تطبيق: احسب بُعْد النقطة $A(2,-1,1)$ عن المستوي (P) ذي المعادلة $x-2y+2z+3=0$.

10) التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء:

المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ و يوازي الشعاع $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ ، له تمثيل وسيطي من الشّكل:

$$(D):\begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t \\ z=z_0+\gamma t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

($\vec{u}$ هو **شعاع توجيه** لـ (D))

☑ تطبيق: اكتب تمثيلا وسيطيّا للمستقيم (AB) الذي يشمل النّقطتيْن $A(1,1,-1)$ و $B(0,1,2)$.

11) بُعْد نقطة عن مستقيم:

لحساب بُعْد نقطة A عن مستقيم (D) ، نعيّن مسقطها العمودي H على هذا المستقيم ، ويكون بُعْد A عن (D) هو الطول AH

☑ تطبيق: لتكن النقطة $A(2,1,-1)$ و ليكن المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-2t \\ z=2-t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$. احسب بُعْد A عن (D)

12) سطح الكرة في الفضاء :

* معادلة سطح الكرة:

معادلة سطح الكرة (S) ذات المركز $\omega(x_0,y_0,z_0)$ وَ نصف القطر R تُكتب كما يلي :

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$.

☑ تطبيقات:

ت1: جِدْ معادلة سطح الكرة ذات المركز $\omega(1,-2,0)$ و نصف القطر 3.

ت2: عيّن مركز و نصف قطر سطح الكرة المعيّن بالمعادلة المبسّطة التّالية : $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=8$.

* المسألة العكسيّة:

لتكن (E) : مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث:

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

لمعرفة طبيعة (E) ، يمكن استعمال إحدى الطريقتيْن التاليتيْن:

1. **طريقة المميّز**: نحسب المميّز $k=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$.

I- إذا كان $k<0$ ، فإنّ $(E)=\varnothing$.

II- إذا كان $k=0$ ، فإنّ $(E)=\left\{M\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)\right\}$.

III- إذا كان $k>0$ ، فإنّ (E) هي سطح كرة مركزها $\omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ وَ نصف قطرها $R=\sqrt{k}$.

2. **طريقة إتمام المربّع**:

وهي طريقة معروفة تستخدم فيها المتطابقات الشهيرة.

ترجيح: إذا اشتملت المعادلة على وسيط ،يفَضَّل استخدام طريقة المميّز،أمّا إذا لم تشتمل على ذلك فيبدو أنّ الطريقة الثانية أنسب.

☑ تطبيق: تعرّف على مجموعة النقط (E) من الفضاء و أعط عناصرها المميّزة في كلّ حالة :

ا) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$.

بـ) $x^2+y^2+z^2+4x-2z+5=0$.

13) الوضعيّة النسبيّة لمستقيميْن في الفضاء :

ليكن المستقيم (D) الذي شعاع توجيهه $\vec{u}$ ، و المستقيم (D') الذي شعاع توجيهه $\vec{u'}$.

ا- إذا كان $\vec{u}$ // $\vec{u'}$ فإنّ (D) و (D') متوازيان(إمّا **متوازيان و مختلفان** و إمّا **منطبقان**).

بـ- إذا كان $\vec{u}$ ⁂ $\vec{u'}$ فإنّ (D) و (D') غير متوازييْن (إمّا **متقاطعان** و إمّا **من مستوييْن مختلفيْن**).

☜ ملاحظة : في التطبيقات، نوضّح كيف يمكن التمييز بين هذه الحالات الأربع.

☑ تطبيق: ليكن المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ، (D_4) المعرّفة بتمثيلاتها الوسيطيّة التالية على الترتيب :

$$\begin{cases} x=-2+5t_1 \\ y=-1-t_1 \\ z=3+4t_1 \end{cases} ;\ t_1\in\mathbb{R} \quad ؛ \quad \begin{cases} x=1-t_2 \\ y=4+3t_2 \\ z=5-t_2 \end{cases} ;\ t_2\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x=t_3 \\ y=1-3t_3 \\ z=4+t_3 \end{cases} ;\ t_3\in\mathbb{R} \quad ؛ \quad \begin{cases} x=2+2t_4 \\ y=1-6t_4 \\ z=6+2t_4 \end{cases} ;\ t_4\in\mathbb{R}$$

ادرس الوضعيّة النسبيّة لكلٍّ من (D_1) مع (D_2) ثم (D_1) مع (D_3) ثم (D_2) مع (D_3) و أخيرا (D_2) مع (D_4).

14) الوضعيّة النسبيّة لمستقيم مع مستو في الفضاء :

نعتبر المستقيم (D) و المستوي (P) في الفضاء.

هناك ثلاث حالات محتملة :

ا- الحالة الأولى : (D) محتوى في (P).

بـ- الحالة الثانية : (D) يوازي تماما (P) (تقاطعهما خالٍ).

جـ- الحالة الثالثة : (D) يقطع (P).

☜ ملاحظة : في التطبيقات، نوضّح كيف يمكن التمييز بين هذه الحالات الثلاث.

☑ تطبيق: نعتبر المستقيم (D) ذا التمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$ والمستويات: $(P_1):2x+y-z-3=0$

$(P_2):-4x-2y+2z+1=0$ ؛ $(P_3):x-y+z-6=0$

ادرس الوضعيّة النسبيّة للمستقيم (D) مع كلٍّ من المستويات (P_1) ثم (P_2) ثم (P_3).

15)الوضعيّة النسبيّة لمستويين في الفضاء :

نعتبر المستويين (P) و (P') المُعرّفين بمعادلتيْهما كما يلي :

$(P):ax+by+cz+d=0$ ؛ $(P'):a'x+b'y+c'z+d'=0$

1/ إذا كان $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ فإنّ (P) و (P') **منطبقان**.

2/ إذا كان $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$ فإنّ (P) و (P') **متوازيان تماما**

3/ إذا كان التناسب $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ غير محقق فإنّ (P) و (P') **متقاطعان**. في التطبيقات، نوضّح كيف نُعيّن مستقيم تقاطعهما.

☜ملاحظة : في حالة انعدام a' أو b' أو c' أو d' (انظر الملاحظة1 في الفقرة 1 من الدليل).

☑ تطبيق: نعتبر المستويات :

$(P_1):2x+y-z-3=0$ ؛ $(P_2):-4x-2y+2z+1=0$

$(P_3):x-y-2z-6=0$ ؛ $(P_4):-6x-3y+3z+9=0$

ادرس الوضعيّة النسبيّة لكلٍّ من (P_1) مع (P_2) ثم (P_1) مع (P_3) ثم (P_1) مع (P_4).

16)تقاطع ثلاثة مستويات في الفضاء:

لدراسة تقاطع ثلاثة مستويات في الفضاء، يمكن أن ندرس تقاطع اثنين منهما، فإذا كانا متوازيين تماما نستنتج أنّ تقاطع المستويات الثلاثة **خالٍ** ، أمّا إذا كانا متقاطعين فيصبح تقاطع المستويات الثلاثة عبارة عن **تقاطع مستقيم مع مستو** .

☑ تطبيق: نعتبر المستويات :

$(P_1):4x+y+z+10=0$ ؛ $(P_2):2x+y+3=0$

$(P_3):x+y-z-3=0$. عيّن $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)$.

17) تعامد مستويين في الفضاء:

يتعامد مستويان في الفضاء إذا تعامد شعاعاهما الناظميّان

بمعنى إذا كان $(P):ax+by+cz+d=0$

و كان $(P'):a'x+b'y+c'z+d'=0$ ، فلدينا :

$$(P)\perp(P') \text{ يعني } a.a'+b.b'+c.c'=0$$

18) تعامد مستقيمين في الفضاء:

يتعامد مستقيمان في الفضاء إذا تعامد شعاعا توجيههما.

بمعنى إذا كان $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع توجيه للمستقيم (D)

و كان $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ شعاع توجيه للمستقيم (D')، فلدينا :

$$(D)\perp(D') \text{ يعني } \alpha.\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'=0$$

19) تعامد مستقيم و مستو في الفضاء:

يتعامد مستقيم و مستو في الفضاء إذا توازى شعاع توجيه هذا المستقيم مع الشعاع الناظمي لهذا المستوي.

بمعنى إذا كان $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع توجيه للمستقيم (D)

و كان $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعا ناظميّا للمستوي (P)، فلدينا :

$$(D)\perp(P) \text{ يعني } \frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}$$

20)الوضعيّة النسبيّة لسطح كرة مع مستو في الفضاء :

(S) سطح الكرة ذات المركز $\omega(x_0,y_0,z_0)$ ونصف القطر R وَ (P) المستوي ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$.

لتكن $d(\omega,P)$: بُعْد النقطة ω عن المستوي (P).

1) إذا كان $d(\omega,P)\succ R$ ، فإنّ $(S)\cap(P)=\varnothing$.

2) إذا كان $d(\omega,P)=R$ ، فإنّ $(S)\cap(P)=\{H\}$.

(المستوي (P) يمسّ سطح الكرة (S) في نقطة H).

3) إذا كان $d(\omega,P)\prec R$ ، فإنّ $(S)\cap(P)=C(I,r)$.

(المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة مركزها I و نصف قطرها r).

☜كيفيّة تعيين العناصر المميّزة في الحالتيْن2) وَ3):

1.نُعيّن نقطة التّماس H في الحالة2) أوالنقطة I: مركز دائرة التقاطع في الحالة3) على أساس أنّها نقطة تقاطع المستوي (P)مع المستقيم (ωH) أو المستقيم (ωI).

ملاحظة: نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (ωH) أو المستقيم (ωI)بناء على أنّ هذا المستقيم يشمل النقطة ω وَ يوازي الشعاع النّاظمي $\vec{n}$ للمستوي (P).

2.يُحسَب نصف القطر r لدائرة التقاطع بالقانون التّالي:

$$r=\sqrt{R^2-d^2}$$

حيث يرمز R إلى نصف قطر سطح الكرة ،

و يرمز d إلى $d(\omega,P)$ أيْ بُعْد مركز سطح الكرة عن (P).

21)الوضعيّة النسبيّة لسطح كرة مع مستقيم في الفضاء :

لدراسة الوضعيّة النسبيّة لسطح كرة (S) مع مستقيم (D) في الفضاء، نعوّض x ، y ، z من التمثيل الوسيطي لِـ (D) في معادلة (S) فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها الوسيط،(وليكن t مثلا) :

1) إذا كان $\Delta\prec 0$ ، فإنّ $(S)\cap(D)=\varnothing$.

2) إذا كان $\Delta=0$ ، فالمعادلة تقبل حلا مضاعفا $t_1=t_2$ و بتعويض t بقيمة الحل المضاعف في التمثيل الوسيطي لِـ (D) نجد إحداثيّات نقطة التماس بيْن (S) و (D).

3) إذا كان $\Delta\succ 0$ ، فالمعادلة تقبل حلّيْن متمايزيْن t_1 و t_2 و بتعويض t_1 و t_2 في التمثيل الوسيطي لِـ (D)، نحصل على إحداثيّات نقطتيْ تقاطع (S) مع (D).

22)جيب تمام زاوية شعاعيّة :

إذا كان $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$ شعاعيْن يختلفان عن $\vec{0}$ فإنّ

$$\cos\left(\vec{u},\vec{u'}\right)=\frac{\alpha.\alpha'+\beta.\beta'+\gamma.\gamma'}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}$$

.

23)مرجح نقطتيْن:

لتكن A و B نقطتيْن من الفضاء، و ليكن α و β عدديْن حقيقيّيْن حيث $\alpha+\beta\neq 0$ ، نقول إنّ النقطة H هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ إذا كان $\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}=\vec{0}$.

فكرة: لإنشاء المرجح H ، يمكن استخدام إحدى العلاقتيْن:

$\overrightarrow{AH}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{BH}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

نتيجة هامّة: مهما كانت النقطة M من الفضاء ، فإنّ:

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MH}$.

***مركز ثقل نقطتيْن:**

إذا كان $\alpha=\beta$ ، نقول إنّ H هي مركز ثقل النقطتيْن A و B.

ملاحظة1: مركز ثقل نقطتيْن هو منتصفهما.

24)مرجح ثلاث نقط :

لتكن A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء، و لتكن α ، β ، γ أعدادا حقيقيّة حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ ، نقول إنّ النقطة H هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ إذا تحقق ما يلي :

$\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}+\gamma\overrightarrow{HC}=0$

فكرة: لإنشاء المرجح H ، يمكن- مثلا- استخدام العلاقة:

$\overrightarrow{AH}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.

نتيجة هامّة1: مهما كانت النقطة M من الفضاء ، فإنّ:

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MH}$.

تنبيه : إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ ، فلا يوجد مرجح للنقط A ، B ، C بالمعاملات α ، β ، γ ؛ و يكون الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ شعاعا ثابتا (مستقلا عن M) ، و يتم تحويل العبارة بإدخال إحدى النقط المعلومة و استعمال علاقة *Chasles*.

نتيجة هامّة2: إذا كانت H مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ ،فمهما كانت النقطة M من الفضاء

$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MH^2+\alpha HA^2+\beta HB^2+\gamma HC^2$

***إحداثيّات مرجح ثلاث نقط :**

إذا كان $A(x_A,y_A,z_A)$ ؛ $B(x_B,y_B,z_B)$ ؛ $C(x_C,y_C,z_C)$ فإنّ إحداثيّات المرجح H تحسب كما يلي :

$x=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ ؛ $y=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

$z=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

***مركز ثقل ثلاث نقط :**

نقول إنّ النقطة G هي مركز ثقل النقط A ، B ، C إذا كان:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$.

إحداثيّات مركز ثقل النقط A ، B ، C:

$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$ ؛ $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$

$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$

25)مرجح أربع نقط أوْ أكثر :

يُعرَّف مرجح أربع نقط أوْ أكثر بنفس الكيفيّة التي عرِّف بها مرجح ثلاث نقط (انظر الفقرة24)).

26)المستوي المحوري :

H و H' نقطتان متمايزتان من الفضاء. المستوي المحوري للقطعة $[HH']$ هوالمستوي العمودي على $[HH']$ في منتصفها

27)مجموعات النقط في الفضاء :

نتيجة1: H نقطة من الفضاء وَ k عدد حقيقي موجب تماما مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $HM=k$ هي : سطح الكرة ذات المركز H وَ نصف القطر k.

نتيجة2: H و H' نقطتان متمايزتان من الفضاء. مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $MH=MH'$ هي : المستوي المحوري للقطعة $[HH']$.

نتيجة3: H و H' نقطتان متمايزتان من الفضاء. مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'}=0$ هي: سطح الكرة ذات القطر HH'.

نتيجة4: H نقطة من الفضاء وَ $\vec{U}$ شعاع ثابت غير $\vec{0}$. مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MH}.\vec{U}=0$ هي: المستوي الذي يشمل النقطة H وَ يعامد الشعاع $\vec{U}$.

28) التمثيل الوسيطي لمستو في الفضاء:

في الفضاء، نعتبر النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ و الشعاعيْن غير المتوازييْن $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ وَ $\vec{u'}(\alpha',\beta',\gamma')$. التّمثيل الوسيطي للمستوي (P) الذي يشمل A و يوازي $\vec{u}$ وَ $\vec{u'}$ يُعطى كالتّالي :

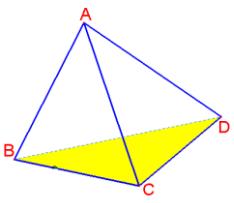
$$(P):\begin{cases}x=x_0+\alpha t+\alpha'\lambda\\ y=y_0+\beta t+\beta'\lambda\\ z=z_0+\gamma t+\gamma'\lambda\end{cases};\ t\in\mathbb{R};\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

29)كيفيّة إثبات أنّ أربع نقط تنتمي إلى نفس المستوي:

لإثبات أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس المستوي نبيّن أنّ ثلاثة منها تشكّل مستويا ، و أنّ الرابعة تنتمي إليه.

طريقة أخرى: نبيّن- مثلا- أنّه يوجد عددان حقيقيّان α و β بحيث $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$.

30) حجم رباعي وجوه :



يُحسب الحجم V لرباعي الوجوه بالقانون التّالي: $V=\frac{S\times h}{3}$ حيث ترمز S إلى مساحة القاعدة و ترمز h إلى الارتفاع.

إعداد الأستاذ : محمد جبالي