الدوال العددية

دورة2009

I)1-أ)حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+\frac{4}{x+1})=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}(1+\frac{4}{x+1})=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}(1+\frac{4}{x+1})=+\infty$$

ملاحظة: يمكن استنتاج هده النهايات من البيان

ب)تشكيل جدول التغيرات بقراءة بيانية

x	$-\infty$		-1		0
g'(x)		-	‖	-	
g(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4

2-أ) حساب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{4}{x+1})=+\infty$$

ب) التحقق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)

المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x$ لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{4}{x+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{4}{x+1})=0$$

جـ) دراسة تغيرات الدالة g

أتجاه التغير

لدينا: g قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث:

$$g'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x)=0$ معناه $(x-1)(x+3)=0$

معناه: $x=1$ أو $x=-3$ مرفوض

و عليه إشارة المشتق هي حسب إشارة $x-1$

و هي حسب الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	

جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		-		+	
g(x)	4 ↘		3	↗	$+\infty$

II-1أ)حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$

$$*\ \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h^2-3h}{h(h+1)}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h-3}{h+1}=-3$$

$$*\ \lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{-h^2-5h}{h(h+1)}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{-h-5}{h+1}=-5$$

نستنتج أن k ليست قابلة للإشتقاق عند0 لأن العدد المشتق من اليمين(-3) لايساوي العدد المشتق من اليسار(-5).

ب) اعطاء تفسيرا هندسيا للنتيجة

k قابلة للإشتقاق من اليمين وقابلة للإشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفي مماس عند النقطة التي فاصلتها 0 النقطة التي احداثياها $(0;4)$ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k

2)كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2)

* (Δ_1) هو نصف المماس عند $x_0=0$ حيث $x_0\geq 0$

لدينا: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$

ومنه: $y=-3(x-0)+4$ أي $y=-3x+4$

* (Δ_2) هو نصف المماس عند $x_0=0$ حيث $x_0\leq 0$

لدينا: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$

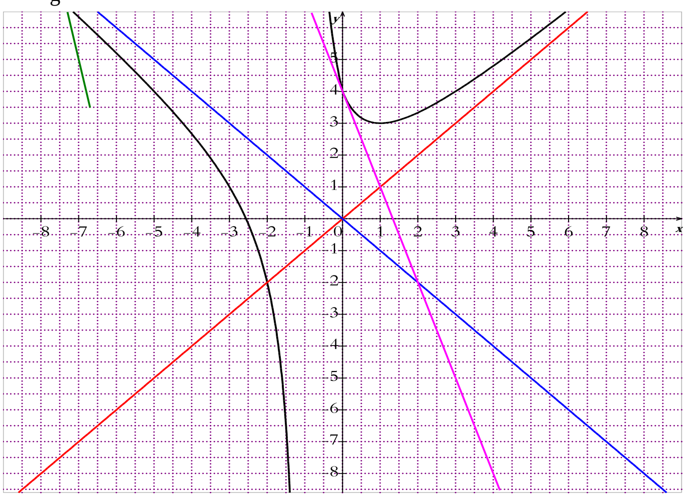
ومنه: $y=-5(x-0)+4$ أي $y=-5x+4$

3)رسم كلا من (Δ_1) و (Δ_2) والمنحنى (C_k)

لرسم المنحنى (C_k) نلاحظ:

إذا كانت $x\leq 0$ فإن: $k(x)=f(x)$ ومنه: $(C_f)=(C_k)$

إذا كانت $x\geq 0$ فإن: $k(x)=g(x)$ ومنه: $(C_g)=(C_k)$



دورة2008

1-أ)تشكيل جدول تغيرات الدالة g بقراءة بيانية

من البيان يمكن استنتاج الجدول

x	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$			
$g(x)$	-2 ↗	0 ↗	$+\infty$

تحديد $g(0)$ وإشارة $g(0.5)$

من البيان لدينا $g(0)=-1$ وإشارة $g(0.5)>0$

ب)تعليل وجودعدد حقيقي $\alpha\in]0;\frac{1}{2}[$ يحقق $g(\alpha)=0$

g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0،\frac{1}{2}]$ و$g(0)\times g(\frac{1}{2})\prec 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha\in]0;\frac{1}{2}[$ يحقق $g(\alpha)=0$

جـ) استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال]-1 ، +∞[

من جدول التغيرات لدينا:

اذاكانت $x\in]-1;\alpha[$ فإن $g(x)\in]-2;-1[$

اذاكانت $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن $g(x)\in]-1;+\infty[$

2-أ)التحقق أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

لدينا: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}=\dfrac{g(x)+3}{(x+1)^2}$

f قابلة للإشتقاق على المجال]-1 ، +∞[حيث:

$$f'(x)=\frac{g'(x)(x+1)^2-2(x+1)g(x)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)(x+1)-2g(x)}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب)تعيين $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ دون حساب

حسب تعريف العدد المشتق لدينا

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=0$$

من النتيجة السابقة نستنتج ان للمنحنى (Γ) مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y=f(\alpha)$

جـ)حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$

لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}=+\infty$

التفسير البياني لهذه النتيجة أن المنحنى(Γ) مقارب يوازي حامل محور التراتيب معادلته: x=-1

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty} x+1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=+\infty$

التفسير البياني لهذه النتيجة أن المنحنى(Γ) مقارب مائل معادلته: y=x+1 في جوار $+\infty$

د) تشكيل جدول تغيرات الدالة f

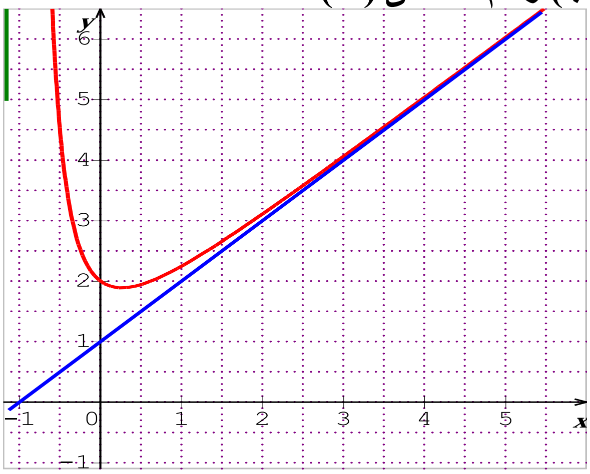
اشارة $f'(x)$ هي حسب اشارة $g(x)$

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3-أ)تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}

لدينا: $f(0,26)=1,89$

ب) رسم المنحنى (Γ)



الدوال الأسيـــــــة

دورة2013

1)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$

لدينا: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ والمعرفة على $]-\infty;1[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right)=2$$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-1}}=1$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left(\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right)=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} e^{\frac{1}{x-1}}=0$

استنتاج مستقيمين مقاربين للمنحنى (C)

من النهايتين السابقتين نستنتج أن :

المستقيم ذا المعادلة : $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C)

المستقيم ذا المعادلة : $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C)

2)حساب $f'(x)$ وتبيان أن f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

لدينا: $f'(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)'+\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)'=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$

ومنه: $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}\left[1+e^{\frac{1}{x-1}}\right]$

$f'(x)\prec 0$ لأن $1+e^{\frac{1}{x-1}}\succ 0$ و $\frac{-1}{(x-1)^2}\prec 0$

منه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $]-\infty;1[$

x	$-\infty$		0		α		1
$f'(x)$		-		-		-	
$f(x)$	2	↘	e^{-1}	↘	0	↘	$-\infty$

3)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ حسب مبرهنة القيم

المتوسطة يوجد عدد وحيدا $\alpha\in]-\infty;1[$ يحقق: $f(\alpha)=0$

إيجاد حصرا للعدد α باستعمال الجدول المعطى

في الجدول لدينا: $f(0,21)=0,016$ و $f(0,22)=-0,005$

من الجدول المعطى نستنتج أن $\alpha\in]0,21;0,22[$.

4)رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)

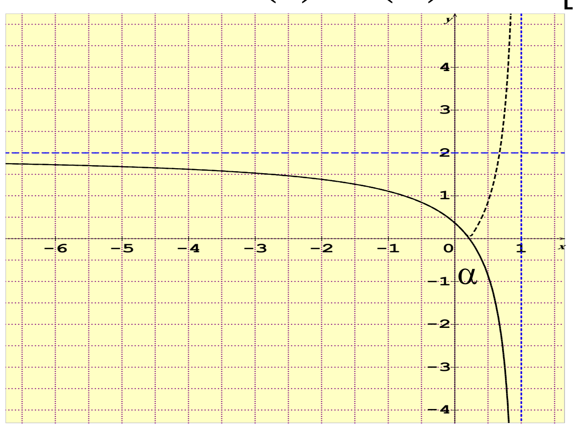
و (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

توضيح: كيفية رسم (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

لدينا: $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ;x\in]-\infty;\alpha] \\ -f(x) & ;x\in]\alpha;1[\end{cases}$

ومنه : $x\in]-\infty;\alpha]$ معناه $(C')=(C)$

$x\in[\alpha;1[$ معناه (C') نظير (C) بالنسبة لمحور الفواصل



5) تعيين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m

المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلان مختلفان في الإشارة أي المستقيم

ذو المعادلة $y=m$ يقطع المنحنى (C') في نقطتين مختلفتين

من البيان نجد أن : $m\in]e^{-1};2[$

II-1)دراسة تغيرات g وتشكيل جدول تغيراتها على $]-\infty;1[$

* $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}1} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$

*لدينا: $g(x)=f(2x-1)$ ومنه $g'(x)=2f'(2x-1)$

وعليه الدالة g لها نفس اتجاه تغير الدالة f أي g متناقصة

تماما على $]-\infty;1[$ لأن $f'(2x-1)\prec 0$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		1
$g'(x)$		-	
$g(x)$	2	↘	$-\infty$

2أ)التحقق أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ **وأن:** $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$

$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\frac{\alpha+1}{2}-1\right)=f(\alpha)=0$ من الجواب 3

$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\frac{\alpha+1}{2}-1\right)=2f'(\alpha)$

ب)استنتاج معادلة (T) المماس لـ g عند الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$

لدينا: $(T): y=g'(\frac{\alpha+1}{2})(x-\frac{\alpha+1}{2})+g(\frac{\alpha+1}{2})$

ومنه: $(T): y=2f'(\alpha)(x-\frac{\alpha+1}{2})+0$

جـ)التحقق أن: $y=\frac{2x}{(\alpha-1)^3}-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T)

لدينا: $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}-\frac{-1}{(\alpha-1)^2}e^{\frac{1}{\alpha-1}}$

لكن: $f(\alpha)=0$ معناه $-\frac{\alpha}{(\alpha-1)}=e^{\frac{1}{\alpha-1}}$

ومنه : $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}+\frac{\alpha}{(\alpha-1)^3}=\frac{1}{(\alpha-1)^3}$

وعليه تكون معادلة (T) كما يلي:

$$(T): y=2\frac{1}{(\alpha-1)^3}(x-\frac{\alpha+1}{2})=\frac{2x}{(\alpha-1)^3}-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$$

1-I) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-xe^x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-xe^x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x)=+\infty$

2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $g'(x)=(1-xe^x)'=0-(1e^x+xe^x)=e^x(-x-1)$

$g'(x)=0$ معناه $(-x-1)=0$ لأن $e^x\succ0$

معناه $(-x-1)=0$ أي $x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	+	0	-

وعليه جدول التغيرات يكون كالآتي

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1 ↗	$g(-1)$	↘ $-\infty$

3-أ) تبيان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

و $g(-1)\succ0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث يحقق $f(\alpha)=0$.

ب) التحقق أن $0,5\prec\alpha\prec0,6$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا: $g(0,5)\succ0$ و $g(0,6)\prec0$ ومنه $0,5\prec\alpha\prec0,6$

لدينا: $g(]-\infty;\alpha[)=]1;0[$ معناه $g(x)\succ0$

$g(]\alpha;+\alpha[)=]-\infty;0[$ معناه $g(x)\prec0$.

1-II) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x(e^x-1)=+\infty$

2) تبيان أنه من أجل كل $x\in]-\infty;2]$: $f'(x)=-g(x)$

لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;2]$:

$f'(x)=1e^x+(x-1)e^x-1=-(1-xe^x)=-g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$ على $]-\infty;2]$ وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=-g(x)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $f(2)$

3) تبيّان أن $f(\alpha)=-\frac{\alpha^2+1}{\alpha}$ واستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا: $0,5\prec\alpha\prec0,6....(1)$

ومنه: (1) تكافئ $0,25\prec\alpha^2\prec0,36$

وتكافئ $1,25\prec\alpha^2+1\prec1,36....(2)$

من المتباينتين (1) و(2) نجد: $\frac{1,25}{0,6}\prec\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\prec\frac{1,36}{0,5}$

أي $2,08\prec\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\prec2,72$ ومنه $-2,72\prec f(\alpha)\prec-2,08$

4-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$

ومنه: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

لدينا: $(f(x)-y)=(x-1)e^x$

إشارة الفرق $(x-1)e^x$ هي حسب إشارة $(x-1)$ لأن $e^x\succ0$

وعليه وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) تكون حسب الجدول التالي.

x	$-\infty$	1	2
إشارة الفرق	-	0	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

5-أ) تبيان ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2

لدينا الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

و $f(-1,5)=-0,05$ و $f(-1,6)=0,07$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_2 حيث $-1,6\prec x_1\prec-1,5$ يحقق $f(x_1)=0$

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;2[$

و $f(1,5)=-0,26$ و $f(1,6)=0,37$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_2 حيث $1,5\prec x_2\prec1,6$ يحقق $f(x_2)=0$

ب) إنشاء المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

دورة2011

1-أ)حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-ex-1)=0+\infty-1=+\infty$$

ح.ع.ت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-ex-1)=+\infty-\infty$

ب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x(\frac{e^x}{x}-e-\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty} x(\frac{e^x}{x})=+\infty$

)حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها

$f'(x)=e^x-e$ وإشارته هي $\xrightarrow{\quad - \quad 1 \quad + \quad}$

جـ)تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2-أ)بيان أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}(e^x)=0$$

ومنه المستقيم $(\Delta): y=-ex-1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

ب)كتابة معادلة للمماس(T)

(T) له معادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

ومنه: $y=f'(0)(x-0)+f(0)=(1-e)(x)+0=(1-e)x$

جـ)بيان ان المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا α

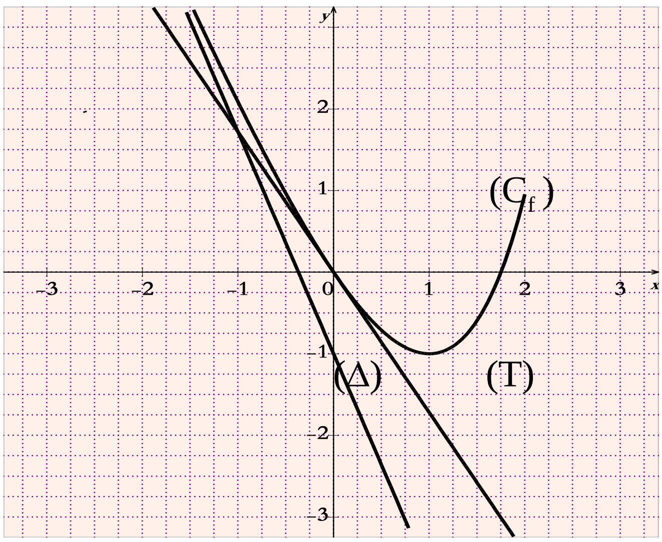
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,75;1,76[$

و $f(1,76)=0,028$ $f(1,75)=-0,0023$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد

α محصور بين 1,75 و 1,76 يحقق: $f(\alpha)=0$

د)رسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحنى (C_f)



دورة2010

1-أ)حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x+0=+\infty$$

ب) حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ **و** $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ **التفسير الهندسي**

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left(\frac{-1}{e^x-1}\right)=+\infty \text{ و } \lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{-1}{e^x-1}\right)=-\infty$$

من النهايتين السابقتين نستنتج أن المستقيم ذي المعادلة :

$x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f)

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}^*$

لدينا: $f'(x)=1-\left(\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}\right)=1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

$f'(x)\succ 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^*$

جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ $+\infty$

-أ)تبيين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين

(Δ) **و** (Δ') **معادلتاهما على الترتيب:** $y=x$ ، $y=x+1$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^x-1}\right)=0$

ومنه : $(\Delta): y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))=\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{1}{e^x-1}\right)=0$

ومنه : $(\Delta'): y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب)دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ')

لدينا:من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$ $f(x)-x=\left(-\frac{1}{e^x-1}\right)\prec 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذوالمعادلة $y=x$ يكون فوق (C_f)

لدينا:من أجل كل $x\in\mathbb{R}_-^*$ $f(x)-(x+1)=\left(\frac{-e^x}{e^x-1}\right)\succ 0$

ومنه المستقيم (Δ') ذوالمعادلة $y=x+1$ يكون تحت (C_f)

4)إثبات أن النقطة $\omega(0;\frac{1}{2})$ هي مركز تناظر لـ (C_f)

$\omega(0;\frac{1}{2})$ مركز تناظر لـ (C_f) معناه $f(-x)+f(x)=1$

لدينا:
$$f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^{x}-1}$$
$$=-\frac{e^{x}}{1-e^{x}}-\frac{1}{e^{x}-1}=\frac{e^{x}-1}{e^{x}-1}=1$$

5-أ) تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}_+^*$

ومنه $f(\ln 2)\times f(1)\prec 0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة

يوجد عدد وحيد α محصور بين $\ln 2$ و 1 يحقق: $f(\alpha)=0$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}_-^*$

ومنه $f(-1,4)\times f(-1,3)\prec 0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة

يوجد عدد وحيد β محصور بين $-1,4$ و $-1,3$ يحقق: $f(\beta)=0$

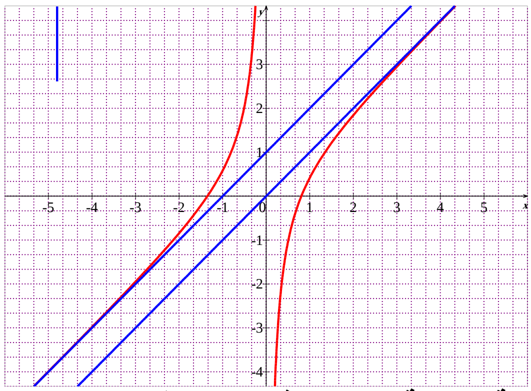
ب) البحث عن وجود مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)

المماسات لـ (C_f) والتي توازي (Δ) معامل توجيهها 1

ومنه: $f'(x_0)=1$ ومنه: $1+\frac{e^{x_0}}{(e^{x_0}-1)^2}=1$ أي $e^{x_0}=0$

أي لا يوجد حل إذن لا يوجد مماس يوازي (Δ)

جـ) رسم (Δ) و (Δ') ثم المنحنى (C_f)



د) المناقشة البيانية وحسب قيم الوسيط الحقيقي m لعدد وإشارة حلول المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$

نضع: $(m-1)e^{-x}=m....(1).$

(1) تكافئ $(m-1)=me^{x}$ تكافئ $m(e^{x}-1)=-1$

تكافئ $m=-\frac{1}{e^{x}-1}$ تكافئ $x+m=x-\frac{1}{e^{x}-1}$

تكافئ $x+m=f(x)$ تكافئ $\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$

حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة: $y=x+m$ من البيان نجد:

إذا كانت $m\prec 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حل موجب تماما.

إذا كانت $0\leq m\leq 1$ فإن المعادلة (1) لاتقبل حلول.

إذا كانت $m\succ 1$ فإن المعادلة (1) تقبل حل سالب تماما.

دورة 2008

I- تعيين العددين الحقيقيين a و b

لدينا: $f(-1)=1$ معناه $(-a-1)e+1=1$ ومنه $a=b$

لدينا: $f'(-1)=-e$ معناه $(2a-b)e=-e$ ومنه $2a-b=-1$

نستنتج مما سبق أن $a=b=-1$

II-أ) تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ والتفسير الهندسي

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{u\to-\infty} g(u)=\lim_{u\to-\infty}(ue^{u})+1=1$$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي لـ (C_f).

ب) دراسة تغيرات الدالة g

$g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ معرفة على $D_f=[-2,+\infty[$

النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ ، $g(-2)=e^{2}+1$

اتجاه التغير: g قابلة للإشتقاق على D_f حيث:

$f'(x)=g'(x)=xe^{-x}$ وشارته هي حسب اشارة x

جدول التغيرات

x	-2		0		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	$e^{2}+1$	↘	0	↗	1

جـ) تبيين ان المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I

يقبل نقطة انعطاف I معناه g'' ينعدم ويغير اشارته

لدينا: $g'(x)=xe^{-x}$ ومنه: $g''(x)=(1-x)e^{-x}$

$g''(x)=0$ إذاكانت $x=1$ واشارته هي حسب الجدول

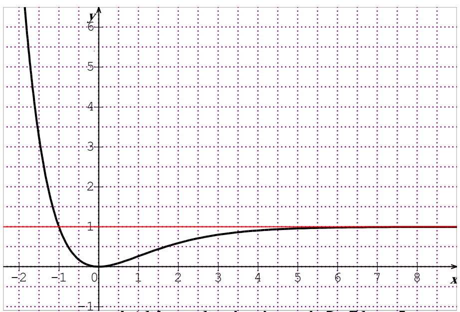
x	-2		1		$+\infty$
g''(x)		+	0	-	

$g(1)=-2e^{-1}+1$ ومنه نقطة الإنعطاف هي $I(1,g(1))$

د) كتابة معادلة المماس لـ (C_g) عند نقطة انعطاف I

$$y=g'(1)(x-1)+g(1)=e^{-1}x-3e^{-1}+1$$

هـ) إنشاء (C_g)



III تعيين اتجاه تغيير k وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: k معرفة على $[-2,+\infty[$ حيث: $k(x)=g(x^2)$

$k'(x)=2xg'(x^2)$ واشارة $k'(x)$ هي حسب اشارة x

جدول تغيرات الدالة k

x	-2		0		$+\infty$
k'(x)		-	0	+	
k(x)	$-5e^{-2}+1$	↘	0	↗	1

I – 1) دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها

$g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$ و $x \in]-1;+\infty[$

حساب النهايات

ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 2\ln(x+1))$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)\left(\frac{x^2}{(x+1)} - 2\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1}(-2\ln(x+1)) = -2(-\infty) = +\infty$$

اتجاه التغير

من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$: $g'(x) = 2(x+1) - \dfrac{2}{(x+1)}$

ومنه: $g'(x) = \dfrac{2[(x+1)^2 - 1]}{(x+1)} = \dfrac{2x(x+2)}{x+1}$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $x(x+2)$ على $]-1;+\infty[$

ومنه : $g'(x) = 0$ معناه $x = 0$

$g'(x) \prec 0$ معناه $x \in]-1;0[$

$g'(x) \succ 0$ معناه $x \in]0;+\infty[$

جدول التغيرات

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2استنتاج أن $g(x) \succ 0$ من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$

الدالة g تقبل 4 كقيمة حدّية صغرى

أي $g(x) \geq 4$ من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$ إذن: $g(x) \succ 0$

II-1-أ)حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانيا

لدينا $f(x) = x - \dfrac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$ و $x \in]-1;+\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -1 - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = -\infty$$

المستقيم ذي المعادلة : $x = -1$ مقارب عمودي لـ(C_f)

ب)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

2-أ) تبيّان أنه من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{-2}{(x+1)}(x+1) - 1(1 - 2\ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بعد التبسيط نجد: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$ أي $f'(x) \succ 0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	-1		0		α		$+\infty$
$f'(x)$				+			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

جـ)تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$ حسب مبرهنة القيم

المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha \in]-1;+\infty[$ حيث: $f(\alpha) = 0$

التحقق أن : $0 \prec \alpha \prec 0,5$

لدينا: $f(0) = -1$ و $f(0,5) = 0,37$ أي: $f(0) \prec 0 \prec f(0,5)$

3-أ)تبيّان أن المستقيم (Δ) : $y = x$ مقارب لـ(C_f) عند $+\infty$

(Δ) : $y = x$ مقارب لـ(C_f) عند $+\infty$ معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة على (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x = -\dfrac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

$f(x) - x = 0$ معناه $x = \sqrt{e} - 1$

$f(x) - x \prec 0$ معناه $x \in]-1;\sqrt{e} - 1[$

$f(x) - x \succ 0$ معناه $x \in]\sqrt{e} - 1;+\infty[$

وعليه : (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e} - 1$

(C_f) تحت (Δ) في المجال $]-1;\sqrt{e} - 1[$

(C_f) فوق (Δ) في المجال $]\sqrt{e} - 1;+\infty[$

4-أ) حساب x_0 فاصلة نقط التماس لـ(C_f) و (T)

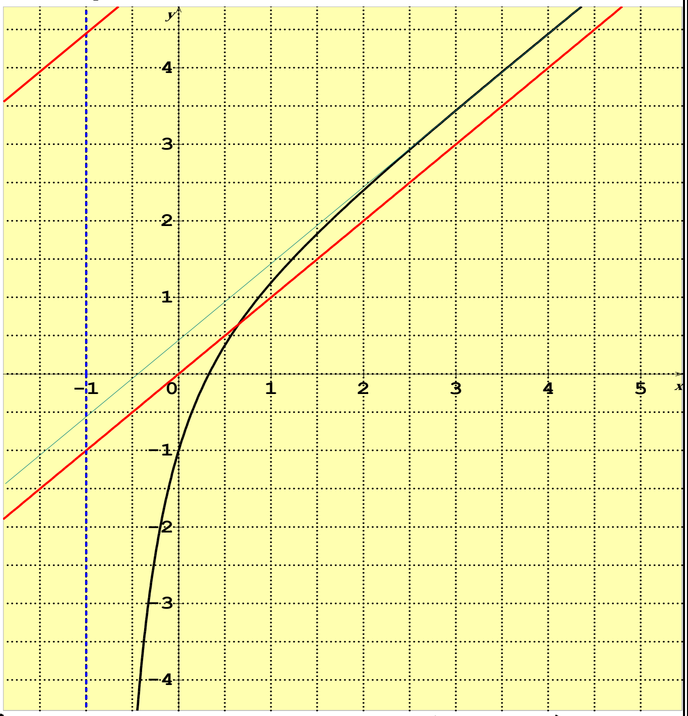
لدينا: معادلة (T) هي: $y = x + \dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$

(T) مماسا لـ(C_f) معناه $f'(x_0) = 1$

معناه $f'(x_0)=1$ معناه $\frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$

معناه $g(x_0)=(x_0+1)^2$ ومنه: $x_0=e\sqrt{e}-1$

ب)رسم المستقيمين المقاربيّن والمماس (T) و (C_f)



ج)تعيين قيم الوسيط الحقيقي m بيانيا حتى تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ **حلّين متمايزين**

المعادلة $f(x)=x+m$ تكافئ $\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$

حيث $y=x+m$ معادلة مستقيم (Δ_m) معامل توجيهه 1

و $y=f(x)$ معادلة المنحنى (C_f)

الحالة 1 : $m=0$ يكون $(\Delta_m)=(\Delta)$

الحالة2 : $m=\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ يكون $(\Delta_m)=(T)$

وعليه نجد من البيان يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلان متمايزان إذا وفقط إذا كانت $0<m<\frac{2}{\sqrt{e^3}}$

دورة2012

1) أ)حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ **وتفسيرالنتيجة هندسيا**

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)=-\infty$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

ب)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+5)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$

2)تبيان أنه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ **:** $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

لدينا: $f(x)=x+5+6((\ln x-\ln(x-1))$

ومنه: $f'(x)=1+6(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1})=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=0$ معناه $x^2-x-6=0$

معناه $x=-2$ أو $x=3$ مرفوض

ومنه أشارة $f'(x)$ تكون كالآتي:

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	f(-2)	$\searrow$	$-\infty$

لدينا: $f(-2)=3-6\ln(2)+6\ln3=0,56$

3-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) **الذي معادلته** $y=x+5$ **هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى** (C_f) **بجوار** $-\infty$**.**

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=6\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{x}{x-1}=0$

ومنه: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب)دراسة وضع المنحنى (C_f) **بالنسبة للمستقيم** (Δ)

لدينا: $(f(x)-y)=6\ln\frac{x}{x-1}$

لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;0[$: $\frac{x}{x-1}\le 1$

ومنه $\ln\frac{x}{x-1}\le 0$ أي الفرق $(f(x)-y)<0$

وعليه يكون المنحنى (C_f) يكون تحت المستقيم (Δ)

4) تبيان ان المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلّين** α **و** β

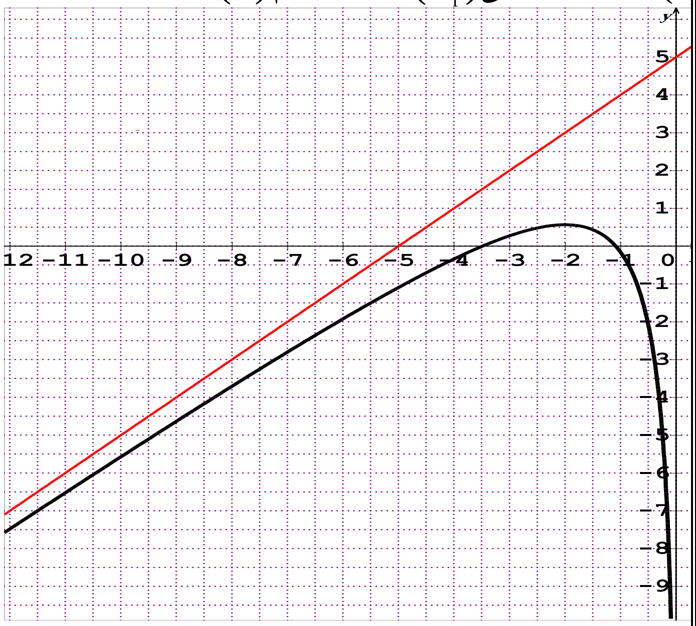
لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-2;0[$

و $f(-1,1)=0,02$ و $f(-1)=-0,15$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة (مبرهنة كوشي) يوجد عدد حقيقي وحيد β حيث $-1,1<\beta<-1$ يحقق $f(\beta)=0$

لدينا الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2[$

و $f(-3,5)=1,33$ و $f(-3,4)=-0,15$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة (مبرهنة كوشي) يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $-3,5 \prec \alpha \prec -3,4$ يحقق $f(\alpha)=0$.

5) انشاء المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)



6-أ)تبيان ان $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ **هي معادلة** (AB)

لدينا $y_A=\frac{1}{2}x_A+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=3+6\ln\frac{3}{4}$

$y_B=\frac{1}{2}x_B+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}$

ومنه $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة (AB)

ب)تبيان ان المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين احداثيتها.

(AB) يمس (C_f) معناه $f'(x_0)=\frac{1}{2}$ حيث x_0 فاصلة نقطة M_0

$f'(x_0)=\frac{1}{2}$ معناه $\frac{x_0{}^2-x_0-6}{x_0(x_0-1)}=\frac{1}{2}$

معناه $2x_0^2-2x_0-12=x_0^2-x_0$

معناه $x_0^2-x_0-12=0$

ومنه: $x_0=-3$ أو $x_0=4$ مرفوض

ولدينا $f(-3)=2+6\ln\frac{3}{4}$ أي $M_0(-3;f(-3))$

ومن جهة أخرى احداثيات النقطة M_0 تحقق صحة معادلة (AB)

دورة 2011

I) بقراءة بيانية

أ)تشكيل جدول التغيرات للدالة g.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g'(x)	+	‖	+
g(x)	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

ب)حل بيانيا المتراجحة $g(x)\succ 0$

من البيان $g(x)\succ 0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

لأن (C_g) يقع فوق حامل محمور الفواصل في هذا المجال

جـ)تعيين بيانيا قيم x والتي من أجلها يكون $0\prec g(x)\prec 1$

من البيان لدينا: $0\prec g(x)\prec 1$ تكافئ $x\in]1;+\infty[$

II-1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{x-1}{x+1}+\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}+\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1+0=1$$

التفسير الهندسي للنتيجتين

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته هي: $x=1$

* (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته هي: $y=1$

2-أ) بيان أن $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ **من اجل كل** $x\in]1;+\infty[$

$$g'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ب)حساب $f'(x)$ ودراسة اشارتها وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f(x)=g(x)+\ln(x-1)-\ln(x+1)$

$$f'(x)=g'(x)+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}\succ 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما من أجل كل $x\in]1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

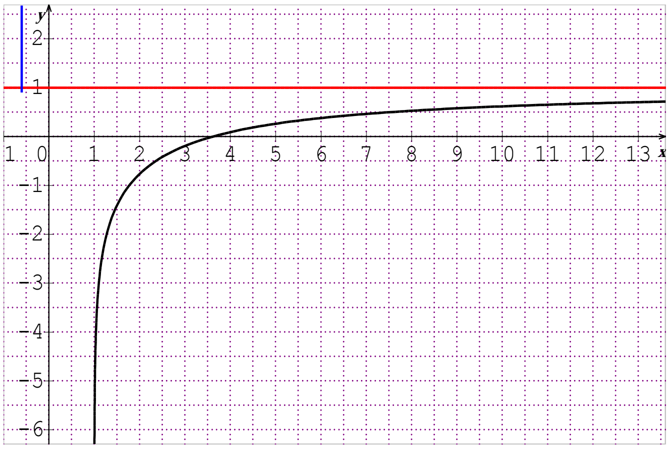
x	1	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty \nearrow$	1

جـــتبيّان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0\in]3,62;3,63[$

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

و $f(3,62)\prec 0$ و $f(3,63)\succ 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة (مبرهنة كوشي) يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 حيث $x_0\in]3,62;3,63[$ يحقق $f(x_0)=0$

د- رسم المنحنى (C_f).



3-أ) **تعييّن إشارة** $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ **على المجال** $]1;+\infty[$

من الجزء I) الجزء جـ- لدينا: $x\in]1;+\infty[$ تكافئ $g(x)\prec 1$

ومنه: $\ln[g(x)]\prec \ln 1$ أي: $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\prec 0$

دورة 2010

I)1-أ) حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

لدينا: $I=]\frac{1}{2};+\infty[$ و $f(x)=1+\ln(2x-1)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1+\lim_{x\to+\infty}\ln(2x-1)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} f(x)=1+\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\ln(2x-1)=-\infty$$

2) تبيين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

لدينا: $f'(x)=0+\frac{2}{2x-1}\succ 0$ لأن $x\succ\frac{1}{2}$.

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال I لأن $f'(x)\succ 0$

تشكيل جدول التغيرات للدالة f

x	0,5	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$

(d) يوازي المماس معناه $f'(x_0)=1$

$f'(x_0)=1$ معناه $\frac{2}{2x_0-1}=1$ ومنه $x_0=\frac{3}{2}$

4-أ) إثبات أنه من أجل كل $x\in I$ **:** $f(x)=\ln(x+a)+b$.

$$f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left[2(x-\frac{1}{2})\right]=1+\ln 2+\ln(x-\frac{1}{2})$$

بالمطابقة نجد: $a=-\frac{1}{2}$ و $b=1+\ln 2$

ب) استنتاج رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة ln

من العبارة $f(x)=1+\ln 2+\ln(x-\frac{1}{2})$ نستنتج ان

(C_f) هو صورة (C) بانسحاب شعاعه $\vec{V}(\frac{1}{2};1+\ln 2)$

رسم (C_f) **و** (C) (في الجزء الثاني)

II-1) حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} g(x)$ **وتبيين أن** $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}(f(x)-x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=1+\lim_{x\to+\infty}(2x-1)\left[-\frac{x}{2x-1}+\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x-1}=-\frac{1}{2}$

2) دراسة اتجاه تغير الدالةg وتشكيل جدول تغيراتها

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{2}{2x-1}-1=\frac{-2x+3}{2x-1}$$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $-2x+3$

جدول تغيرات الدالة g

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(\frac{3}{2})$	↘	$-\infty$

لدينا: $g(\frac{3}{2})=1+\ln(2)-\frac{3}{2}=0,9$

3-أ) حساب g(1) وتبيين أن المعادلة $g(x)=0$ **تقبل حلا وحيد** $\alpha\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ **والتحقق أن** $2\prec\alpha\prec 3$

لدينا: $g(1)=f(1)-1=1+\ln 1-1=0$

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد $\alpha\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ لأن

الدالة متزايدة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

و $g(\frac{3}{2})=0,9$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

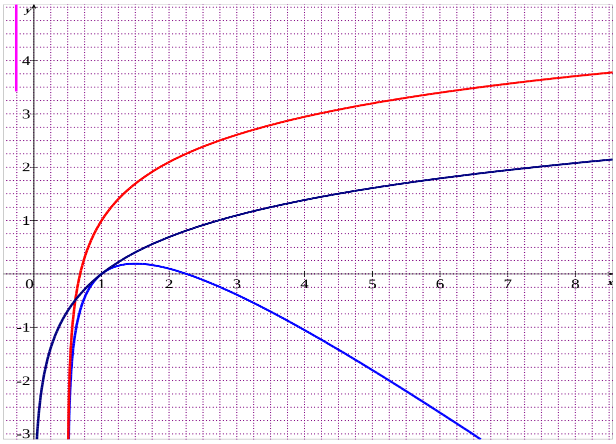
ومنه المعادلة تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

لدينا: $g(2)=f(2)-2=-1+\ln 3=0,38$

$g(3)=f(3)-3=-2+\ln 5=-0,39$

بمأن $g(2)\succ 0\succ g(3)$ فإن $2\prec \alpha \prec 3$.

ب) رسم المنحنى (C_g) على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$.



4)استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال I.

من البيان أو جدول تغيرات الدالة g لدينا إشارة $g(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	
g (x)	- 0 + 0 -

تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (d)

وضعية (C_f) و (d) هي حسب إشارة $g(x)$

إذا كانت $x\in[0,5;1[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن (C_f) تحت (d)

إذا كانت $x\in]1;\alpha[$ فإن (C_f) فوق (d)

إذا كانت $x=1$ أو $x=\alpha$ فإن (C_f) يقطع (d).

5) البرهان أنه من أجل كل $x\in]1;\alpha[$ فإن $f(x)\in]1;\alpha[$.

لدينا: $g(1)=g(\alpha)=0$ ومنه $f(1)=1$ و $f(\alpha)=\alpha$

والدالة: f متزايدة تماما على المجال $]1;\alpha[$

لدينا: $x\in]1;\alpha[$ ومنه $f(1)\prec f(x)\prec f(\alpha)$

إذن: $1\prec f(x)\prec \alpha$.

III-1)تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون

$u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$

$$u_n=f(1+\frac{1}{2n})=1+\ln(1+\frac{1}{n})=1+\ln(\frac{n+1}{n})....(1)$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$u_n=1+2\ln 3-3\ln 2=1+\ln\frac{9}{8}.....(2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن: $\frac{n+1}{n}=\frac{9}{8}$ إذن: $n=8$

2) حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$

$$S_n=(1+\ln 2)+(1+\ln\frac{3}{2})+.....+(1+\ln\frac{n+1}{n})$$

$$S_n=\ln 2.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}......\frac{n+1}{n})+(\underbrace{1+1+....+1}_{n})=\ln(n+1)+n$$

دورة2009

الجزء الأول:

1)حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$ معرفة على $]-1،+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+\ln(x+1))=+\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} -1}(1-2+\ln(x+1))=-\infty$$

2)تبيين أن: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

لدينا: $h'(x)=2x+2+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة h تشكيل جدول تغيراتها

بما أن : $x\succ -1$ فإن: $h'(x)\succ 0$ ومنه : h متزايدة تماما

x	-1	0	+∞
h'(x)		+	
h(x)	−∞	0 ↗	+∞

3)حساب h(0) واستنتاج اشارة h(x)

$h(0)=0$ واشارة $h(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	-1		0		+∞
h (x)		-	0	+	

الجزء الثاني:

1-أ) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانيا

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} -1}(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1})$$

$$=\lim_{x \xrightarrow{>} -1}(-2-\frac{\ln(x+1)}{x+1})=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1}\ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1}\dfrac{-1}{x+1}=-\infty$

نستنتج وجود مستقيم مقارب معادلته: $y=-1$ لـ (C_f)

ب)البرهان أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$

نضع: $t=\ln u$ و $u=e^t$ إذاكان $u\to+\infty$ فإن $t\to+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^t}{t}}=0$

جـ) استنتاج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-1) - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty - 0 = +\infty$$

د)حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = 0$

استنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنجنى (C_f)

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = 0$ ومنه المنحنى يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x-1$ في جوار $+\infty$

هـ) دراسة وضعية (C_f) **بالنسبة للمستقيم المقارب المائل**

ندرس اشارة الفرق $[f(x)-(x-1)] = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

اشارة الفرق هي حسب إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1>0$

$-\ln(x+1) = 0$ معناه $\ln(x+1) = 0$ أي $x = 0$:

$-\ln(x+1) \geq 0$ معناه $\ln(x+1) \leq 0$ أي $-1 \prec x \leq 0$:

$-\ln(x+1) \leq 0$ معناه $\ln(x+1) \geq 0$ أي $x \geq 0$:

نستنتج مايلي:

$-1 \prec x \leq 0$ معناه (C_f) فوق المقارب المائل

$x = 0$ معناه (C_f) يقطع المقارب المائل في النقطة $(0;-1)$

$x \geq 0$ معناه (C_f) تحت المقارب المائل

2) تبيين أن $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

لدينا: f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ حيث:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - 1\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

ومنه: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

تشكيل جدول التغيرات

اشارة $f'(x)$ هي حسب اشارة $h(x)$

جدول التغيرات

x	-1		0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	f(0)	↗	$+\infty$

3)تبيين ان المنحنى (C_f) **يقطع المستقيم:** $y = 2$

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم: $y = 2$ معناه المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين $3,3$ و $3,4$

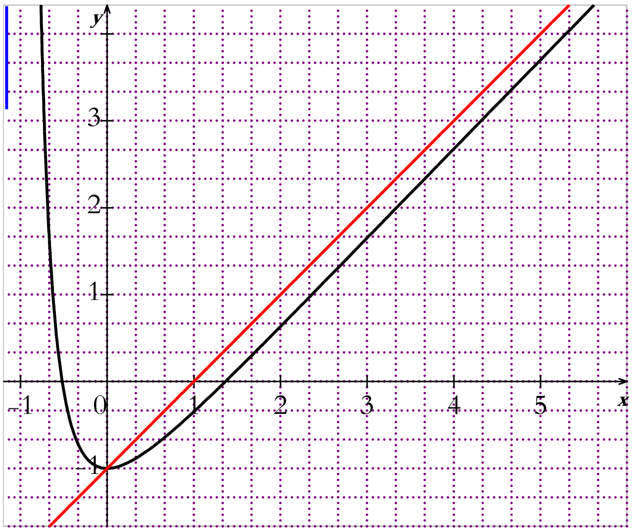
f متزايدة على المجال $]3,3 ، 3,4[$ حسب جدول التغيرات

ولدينا: $f(3,3) = 1,96$ و $f(3,4) = 2,06$

ونلاحظ ان: $f(3,3) \prec 2 \prec f(3,4)$

ومنه وجسب مبرهنة القيم التوسطة يوجد غدد حقيقي وحيد α محصورا بين $3,3$ و $3,4$ بحيث: $f(\alpha) = 2$

4) رسم المنحنى (C_f)



تمنيتنا بالنجاح لجميع التلاميذ في شهادة البكالوريا دورة 01 جوان2014

****

ترقبوا حلول تمارين البكالوريا في الهندسة في الفضاء إن شاء الله

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي