

BAC 2013

المتطلبات

بكالوريوس الشعب العلمية المشتركة

2012-2008

من إحداد: قليل محمد

التمرين رقم : 01 بكالوريا 2008 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الثاني (4 نقط)

$$\begin{cases} u_0 = \alpha & ; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} & ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة كما يلي :}$$

(1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(2) في كل مايلي $\alpha = 2$ ، و نعرف المتتالية العددية (v_n) كما يلي : $v_n = u_n + \frac{8}{3}$

أ) احسب u_1 ، u_2 .

ب) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .

ج) اكتب عبارة u_n بدلالة n . و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين رقم: 02 بكالوريا 2008 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الأول (5 نقاط):

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$

1. احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2. أ) اثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$

ب. جد اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج ؟

3. (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + 2$.

أبين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية .

ب. عبر بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n .

ج. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د . احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

التمرين رقم: 03 بكالوريا 2008 علوم تجريبية

التمرين الثاني (05 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$u_0 = \frac{5}{2} \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$$

(1) أ - ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (d) الممثل

$$\text{للدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ : } f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

ب - باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4

ج - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.

ب - تحقق أن (u_n) متزايدة .

ج - هل (u_n) متقاربة؟ برّر إجابتك .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

أ - اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب - اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين رقم: 04 بكالوريا 2008 علوم تجريبية

تمرين 2: (4 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحددها الأول $U_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$

1 - احسب U_1 و U_2 و U_3 .

2 - (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة .

- استنتج عبارة U_n بدلالة n .

- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3 - (W_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $W_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- احسب المجموع S حيث : $S = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$.

التمرين رقم: 05 بكالوريا 2008 رياضيات

تمرين 2: (4 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحددها الأول $U_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$

1 - احسب U_1 و U_2 و U_3 .

2 - (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة .

- استنتج عبارة U_n بدلالة n .

- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3 - (W_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $W_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- احسب المجموع S حيث : $S = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$.

التمرين رقم: 06 بكالوريا 2009 تسيير و اقتصاد

التمرين الثاني (4 نقاط):

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3u_{n+1} = u_n + 4$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n \leq 2$.

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

ج) استنتج مع التبرير أن المتتالية (u_n) مقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2$

أ) بيّن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حددها الأول و أساسها.

ب) أكتب الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n .

ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + \dots + u_n$.

التمرين رقم: 07 بكالوريا 2009 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الأول (05 نقاط)

- (U_n) متتالية عددية معرفة بـ $U_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = 3U_n - 2$.
1. احسب U_1 ، U_2 .
 2. لتكن المتتالية العددية (V_n) المعرفة بـ : $V_n = U_n - 1$.
أ - أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول V_0 .
ب- اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n .
 3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} - U_n = (-4) \times 3^n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) .
 4. عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون : $U_0 + U_1 + \dots + U_n = n - 79$.

التمرين رقم: 08 بكالوريا 2009 شعبة علوم تجريبية

التمرين الأول: (03.5 نقطة)

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$

المتتالية (v_n) معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) احسب v_0 و v_1 .

(2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$

ج) بين أن (u_n) متقاربة.

التمرين رقم: 09 بكالوريا 2009 شعبة علوم تجريبية

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1. أ) احسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1 .

ب) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج) احسب S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$S_n = 728$$

2. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معوم n كما يلي:

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \quad \text{و} \quad v_1 = 2$$

أ) احسب v_2 و v_3 .

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ج) اكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين رقم:10 بكالوريا 2009 شعبة رياضيات

تمرين 2: (5 نقاط)

- (U_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول $U_0 = 0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 3U_n + 2n + 1$.
 (V_n) المتتالية المعرفة من أجل كلّ عدد طبيعي n كما يلي : $V_n = U_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عدنان حقيقيا
 1) عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (V_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدّها الأول .
 2) احسب كلا من V_n و U_n بدلالة n .
 3) احسب المجموعين S و S' حيث: $S = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ و $S' = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$
 4) أ- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .
 ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها U_n مضاعفا للعدد 5 .

التمرين رقم:11 بكالوريا 2010 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الثالث: (04 نقاط)

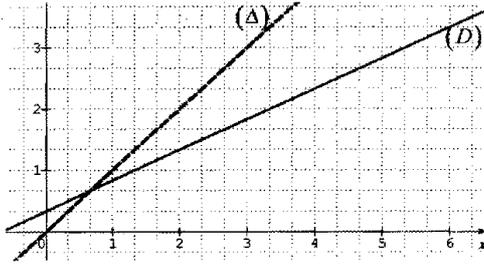
- 1) n عدد طبيعي، أُصّب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + e + e^2 + \dots + e^n$
 (S_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e وحدّها الأول 1 و e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النبيري).
 2) لنكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $w_n = 2n + 4 + e^n$
 بين أن: $w_n = u_n + v_n$
 حيث (u_n) متتالية حسابية و (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول و الأساس لكل منهما.
 3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:
 $4 + 6 + 8 + \dots + (2n + 4) = (n + 1)(n + 4)$
 4) استنتج المجموع S بدلالة n حيث:
 $S = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

التمرين رقم:12 بكالوريا 2009 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الثاني: (06 نقاط)

- لنكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$.
 1) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .
 2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 2$.
 ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
 ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .
 3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$.
 أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .
 ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
 ج- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
 4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n
 فإن: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$

التمرين رقم: 13 بكالوريا 2010 شعبة علوم تجريبية



التمرين الأول: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب:

$$y = x \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

(1) لنكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}, \quad n, \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_0 = 6$$

أ - انقل الشكل ثم مقل على محور الفواصل الحدود التالية: u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب - عين إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

ج - أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) أ - باستعمال الاستدلال بالتراجع، اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > \frac{2}{3}$.

ب - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) تعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ - بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج - احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ واستنتج المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

التمرين رقم: 14 بكالوريا 2011 شعبة تسيير و اقتصاد

التمرين الثاني: (05,5 نقطة)

لنكن المتتالية العددية (u_n) حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n, u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$.

(1) احسب u_1 و u_2 .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > \frac{1}{3}$.

(3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(4) لنكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي $n, v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب - اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

ج - احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم: 15 بكالوريا 2011 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n, u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n, v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

1. المتتالية (v_n) :

أ - حسابية.

ب - هندسية.

ج - لا حسابية ولا هندسية.

2. نهاية المتتالية (u_n) هي:

أ - $+\infty$

ب - $-\frac{1}{2}$

ج - $-\infty$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي $n, S_n = -\frac{1}{2}[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$.

أ - $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

ب - $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$

ج - $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

التمرين رقم:16 بكالوريا 2011 شعبة تسيير و اقتصاد

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$.

1. أ - بَيِّنْ أَنْ (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب - اكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n .

ج - عَيِّنْ قِيمَ العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2. نضع $\alpha = \frac{3}{2}$.

- احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين رقم:17 بكالوريا 2011 شعبة رياضيات

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(U_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} m = PPCM(U_3, U_5) \\ d = PGCD(U_3, U_5) \end{cases} \text{ حيث: } \begin{cases} U_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$$

1/ عَيِّنْ الحدين U_3 و U_5 ثم استنتج U_0

2/ اكتب بدلالة n ، ثم بَيِّنْ أَنْ: 2010 حد من حدود (U_n) وعين رتبته.

3/ عين الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (U_n) يساوي 10080

4/ n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) احسب بدلالة n المجموع S حيث : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{2n}$

ب) استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + \dots + U_{2n}$

و $S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + \dots + U_{2n-1}$

التمرين رقم:18 بكالوريا 2011 شعبة تقني رياضي

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي : $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج أن : $u_n > 1$

2/ ادرس اتجاه تغير (u_n) ثم بَيِّنْ أنها متقاربة ، احسب نهاية (u_n) .

3/ ليكن الجداء p_n المعروف كما يلي : $p_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$

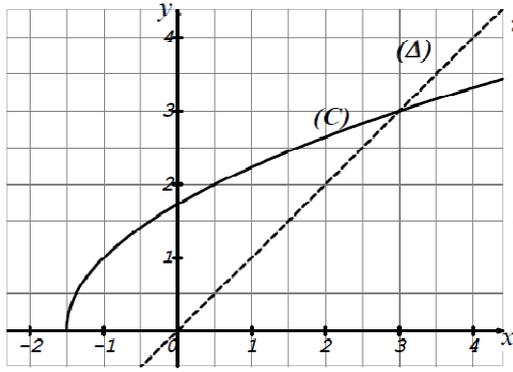
4/ (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي : $v_n = \ln u_n$ حيث \ln دالة اللوغاريتم النيبيري

عَبِّرْ بدلالة p_n عن S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ثم احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$

التمرين رقم: 19 بكالوريا 2012 شعبة علوم تجريبية

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.



(1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{2x+3}$ و (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو معادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (انظر الشكل المقابل).

(أ) - أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة تم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 . (دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

(ب) - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

(3) (أ) - ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

(ب) - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين رقم: 20 بكالوريا 2012 شعبة علوم تجريبية

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.

(1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

(2) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أنّ (u_n) متزايدة تماما.

(3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

(4) (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

(أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدّها الأول.

(ب) اكتب كلاً من u_n و v_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \dots (u_n - 3)$.

اكتب بدلالة n ، ثم بيّن أنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التمرين رقم: 21 بكالوريا 2012 شعبة رياضيات

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = 16$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 6u_n - 9$.

(1) أ- احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 على 7.

ب- خمن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث: $u_{2k} = a[7]$ و $u_{2k+1} = b[7]$.

(2) أ- برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n [7]$.

ب- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2[7]$ ، ثم استنتج أنّ: $u_{2k+1} \equiv 3[7]$.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$.

أ- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- احسب، بدلالة n ، كلا من u_n و S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

تمارين البكالوريا

تمرين 01 :

(u_n) متتالية حسابية أساسها r .

(v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$w_n = u_{3n} + \sqrt{7} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2}$$

بين أن المتتاليتان (v_n) و (w_n) حسابيتان يطلب تعيين الأساس لكل منهما

تمرين 02 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل n من \mathbb{N} بـ :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{-1 + 2u_n}{u_n} \end{cases}$$

1- بين أن (v_n) متتالية حسابية

2- أحسب v_n ثم u_n بدلالة n واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 03 :

1- أحسب قيمة العددين :

$$T = 3 + 7 + 11 + \dots + 999 \quad \text{و} \quad S = 6 + 10 + 14 + \dots + 1002$$

2- أحسب المجموع $S_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n+1)$ بدلالة n

ثم استنتج قيمة العدد : $X = 1 + 4 + 7 + \dots + 2008$

تمرين 04 :

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1- أكتب u_n بدلالة n .

2- أحسب المجموع $u_1 + u_2 + \dots + u_7$

3- لتكن (v_n) متتالية بحيث : $v_n = u_{2n}$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$

أحسب المجموع $v_1 + v_2 + \dots + v_8$

تمرين 05 :

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان بحيث : $u_1 = 1$ و $v_n = u_n + 3$ و $u_{n+1} = 2u_n + 3$

1- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

2- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n . استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3- أحسب : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

4- أحسب المجاميع التالية :

$$\Sigma_n = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 \quad \text{و} \quad T_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

تمرين 06 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2}$$

1- لتكن (w_n) المتتالية المعرفة بـ : $w_n = u_n + v_n$.

برهن أن (w_n) متتالية هندسية .

2- لتكن (t_n) المتتالية المعرفة بـ : $t_n = u_n - v_n$.

برهن أن (t_n) متتالية حسابية .

3- عبر عن المجموع التالي بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تمرين 07 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل n من \mathbb{N} بـ :

$$v_n = 4u_n - 6n + 15 \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1 \end{cases}$$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

2- أحسب v_0 ثم أحسب v_n بدلالة n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$$

3- برهن أن المتتالية (u_n) يمكن كتابتها على الشكل $u_n = t_n + w_n$

حيث : t_n متتالية هندسية و w_n متتالية حسابية .

4- أحسب $W_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ و $T_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$

ثم استنتج : $U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تمرين 08 :

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبان تماما .

تعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0 = a, u_1 = b$ و $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

تعتبر المتتاليتان (v_n) و (w_n) المعرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$w_n = u_{n+1} + 2u_n \quad \text{و} \quad v_n = u_{n+1} - 3u_n$$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2- وهذا الأول

$v_0 = b - 3a$ و أحسب v_n بدلالة n و a و b

2- برهن أن (w_n) متتالية هندسية ثم أحسب w_n بدلالة n و a و b

3- استنتج عبارة u_n بدلالة n و a و b و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 09 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \end{cases}$$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n

2- أحسب $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ ثم استنتج u_n بدلالة n

3- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمرين 10 :

تعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ :

$$v_n = u_n + bn - 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$$

1- بين أنه يوجد عدد طبيعي b تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول

2- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

3- أحسب $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$

تمارين ريت إضافية (الاستعداد للتراجع)

9. بكالوريا

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \text{ و } u_0 = 1$$

- 1- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- 2- برهن أنه : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > n^2$
- 3- أعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع هذا التخمين.

10. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n - \frac{1}{n^2 + 3n + 2} \text{ و } v_0 = 1$$

- 1- أحسب v_1, v_2, v_3, v_4
- 2- أعط تخميناً لعبارة v_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع هذا التخمين.

11. المتتالية (u_n) معرفة بـ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \text{ و } u_0 = 1$$

- 1- برهن بالتراجع أنه : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$
- 2- أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

$$12. \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ المتتالية } (u_n) \text{ معرفة بـ :}$$

- 1- برهن بالتراجع أنه : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 3$
- 2- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$13. \text{ المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ معرفة بـ : } u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n}{2(u_n + 1)}$$

- 1- برهن أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
- 2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً .
- 3- أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

ب) استنتج باستعمال التراجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$14. \text{ المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ معرفة بـ : } u_0 = 5 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

- 1- باستعمال الآلة الحاسبة أحسب u_1, u_2, u_3 .
- 2- أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- 3- لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x}\right)$
- أدرس تغيرات الدالة f
- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > \sqrt{2}$ ثم استنتج تغيرات المتتالية (u_n) .

15. المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و من أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = 2^n$

1. المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معرفة بـ : $u_0 = -1$ و $u_{n+1} = 3u_n + 2$
برهن بالتراجع أن (u_n) متتالية ثابتة .

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + 2(n+1) \text{ و } v_0 = 1$$

- 1- أحسب v_1, v_2, v_3, v_4
- 2- برهن بالتراجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 + n + 1$

3. المتتالية (u_n) معرفة بـ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n}{n+1}$

4. بكالوريا

نضع $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ حيث $n \geq 1$

- 1- أ) أحسب S_1, S_2, S_3, S_4 .
ب) عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n .
- 2- برهن بالتراجع أنه : $\forall n \geq 1, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- 5- برهن بالتراجع أنه :

$$1- \forall n \geq 1, 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$2- \forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$3- \forall n \geq 1, 1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

6. بين بالتراجع أنه :

$$1- \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \geq n$$

$$2- \forall (a \in \mathbb{R}^+) \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$$

$$3- \forall n \geq 2, 5^n \geq 4^n + 3^n$$

$$4- \forall n \geq 3, 3^n \geq (n+2)^2$$

7. من أجل كل عدد طبيعي n ، نعتبر الخاصية :

$$P_n : \ll 3^n \geq 2^n + 5n^2 \gg$$

- 1- بين أن : $\forall n \geq 2, 3n^2 \geq (n+1)^2$
- 2- ما هو أصغر عدد طبيعي غير معلوم n الذي من أجله تكون الخاصية P_n صحيحة .
- 3- برهن أنه من أجل كل $n \geq 5$ تكون P_n صحيحة .

8. أثبت بالتراجع أنه :

1- من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n} - 2^n$ مضاعف للعدد 7

2- من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ مضاعف للعدد 5 .

3- لكل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $3 \times 5^{2n-1} + 2^{2n-2}$ مضاعف للعدد 17.

4- من أجل كل عدد طبيعي n ، $(2n-1)3^n + 1$ مضاعف للعدد 4 .

ملخص الدرس

المتتاليات الهندسية	المتتاليات الحسابية	
الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون بالضرب في نفس الثابت q ، يسمى أساس المتتالية.	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون بإضافة نفس الثابت r ، ويسمى أساس المتتالية	تعريف
$u_{n+1} = q u_n$	$u_{n+1} = u_n + r$	العلاقة التراجعية
الحد الأول u_0 ← $u_n = u_0 q^n$ الحد الأول u_1 ← $u_n = u_1 q^{n-1}$	الحد الأول u_0 ← $u_n = u_0 + n r$ الحد الأول u_1 ← $u_n = u_1 + (n-1)r$	الحد العام
$\forall n \geq p, u_n = u_p q^{n-p}$	$\forall n \geq p, u_n = u_p + (n-p)r$	العلاقة بين حدين
$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ بصفة عامة عند الحد u_n : $S = \text{الحد الأول} \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ حالة خاصة أساسية $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ مع $q \neq 1$	$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$ بصفة عامة الحد الأخير + الحد الأول : $S = \text{عدد الحدود} \times \frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}$ حالة خاصة أساسية $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	مجموع حدود متتالية
$q > 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ $q = 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ $-1 < q < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ $q \leq -1 \rightarrow$ نهاية (q^n) غير موجودة	$r > 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ $r < 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	النهايات
الوسط الهندسي (a, b, c) حدود متتالية هندسية ⇕ $b^2 = a \cdot c$ يسمى العدد b الوسط الهندسي للعدد a و c	الوسط الحسابي (a, b, c) حدود متتالية حسابية ⇕ $2b = a + c$ يسمى العدد b الوسط الحسابي للعدد a و c	الوسط الحسابي و الوسط الهندسي