اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (06 نقط)

ليكن كثير الحدود $P(x)$ حيث: $P(x) = x^3 - 3x - 2$

1)أحسب $P(-1)$ ، ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x) = 0$

2)استنتج حلول كلا من :* المعادلة التالية : $(x+1)(\ln^2 x - \ln x - 2) = 0$.

*المتراجحة التالية: $(x+1)e^{2x} \leq (x+1)(e^x + 2)$

التمرين الثاني (14 نقط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين بيانا.

2)عين العددين الحقيقيين a و b بحيث : $f(x) = ax + \dfrac{b}{3(e^x - 1)}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$.

3)بين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

4) (Δ) و (Δ') المستقيمان اللذّان معادلتاهما على الترتيب : $y = x$ و $y = x + \dfrac{4}{3}$

أ) بيّن أن (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) ، بيّن أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - x - \dfrac{4}{3}\right] = 0$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ').

جـ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث:

$0,9 \prec \alpha \prec 0,91$ و $-1,65 \prec \beta \prec -1,66$.

د) أحسب من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) + f(-x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

أحسب $f(\ln 3)$ ثم استنتج $f(-\ln 3)$

هـ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 2 عند نقطة فاصلتها $x_0 \succ 0$

و) ارسم كلا من المماس (T) والمستقيمين (Δ) و (Δ') ثم المنحنى (C_f).

5) m عدد حقيقي ، ناقش بيانيا ، وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$.

6) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = f(\ln x)$

ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x.

الحل النموذجي لإختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات إعداد الأستاذ: بالعبيدي م العربي

التمرين الأول (06 نقط)

1)حساب $P(-1)$ **،ثم حل في** $\mathbb{R}$ **المعادلة :** $P(x)=0$

*لدينا: $P(x)=x^3-3x-2$

ومنه: $P(-1)=(-1)^3-3(-1)-2=-1+3-2=0$

* $P(-1)=0$ معناه $P(x)=(x+1)(x^2-x-2)$

حيث (x^2-x-2) هوحاصل قسمة $P(x)$ على $(x+1)$

ومنه: $P(x)=0$ معناه $(x+1)=0$ أو $(x^2-x-2)=0$

معناه $\boxed{x=-1 \text{ أو } x=2}$

2)استنتاج حلول المعادلة : $(x+1)(\ln^2 x-\ln x-2)=0$

نضع : $(x+1)(\ln^2 x-\ln x-2)=0....(1)$

ومنه (1) تكافئ: $x=-1$ أو $(\ln^2 x-\ln x-2)=0$

تكافئ: $x=-1$ أو $\ln x=2$ أو $\ln x=-1$

وعليه: $\boxed{x=-1 \text{ أو } x=e^2 \text{ أو } x=e^{-1}}$

استنتاج حلول المتراجحة : $(x+1)e^{2x}\le(x+1)(e^x+2)$

نضع: (2) .... $(x+1)e^{2x}\le(x+1)(e^x+2)$

ومنه (2) تكافئ $(x+1)(e^{2x}-e^x-2)\le 0$

تكافئ $(x+1)(e^x-2)(e^x+1)\le 0$

تكافئ $(x+1)(e^x-2)\le 0$ لأن $(e^x+1)\succ 0$

الجدول التالي يلخص إشارة الجداء $(x+1)(e^x-2)$

x	$-\infty$	-1	$\ln 2$	$+\infty$
$x+1$	-	+	+	
(e^x-2)	-	-	+	
إشارة الجداء	+	-	+	

من الجدول السابق نستنتج أن حلول المتراجحة (2)هي:

$\boxed{x\in[-1;\ln 2]}$.

التمرين الثاني (14 نقط)

1- أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **ثم تيان أن :** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-4)=-\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-3xe^{-x}-4e^{-x}}{3(1-e^{-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

وذلك بعد ضرب حدّي $f(x)$ في e^{-x}

ب)حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}f(x)$ **، التفسير البياني**

$\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0}\dfrac{-4}{3(e^x-1)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\dfrac{-4}{3(e^x-1)}=-\infty$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C_f)

2)تعيّين العددين الحقيقيين a و b.

لدينا: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}=\dfrac{3x(e^x-1)-4}{3(e^x-1)}=x-\dfrac{4}{3(e^x-1)}$

ولدينا أيضا: $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$

بالمطابقة بين عبارتي $f(x)$ نجد: $\boxed{a=1 \text{ و } b=-4}$

3)تبيان أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

لدينا: $f(x)=x-\dfrac{4}{3(e^x-1)}$ ومنه: $f'(x)=1+\dfrac{4e^x}{3(e^x-1)^2}\succ 0$

وعليه f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي

جدول تغيرات f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4- أ) تبيّان أن (Δ) **مقارب للمنحنى** (C_f)

(Δ) مقارب للمنحنى (C_f) معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$

$y=x$ حيث $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{3(e^x-1)}=0$

تبيّان أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x-\dfrac{4}{3}\right]=0$ **وتفسر النتيجة بيانيا.**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x-\dfrac{4}{3}\right]=-\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{(e^x-1)}+1\right]=0$

نستنتج أن المستقيم (Δ')مقارب لـ (C_f)في جوار $-\infty$.

ب) تحدبد وضعية (C_f) **بالنسبة لكل من** (Δ)**و**(Δ')

لدينا: $f(x)-x=\dfrac{-4}{3(e^x-1)}\prec 0$ ومنه (C_f) تحت (Δ)

$f(x)-x-\dfrac{4}{3}=\left[\dfrac{-4e^x}{3(e^x-1)}\right]\succ 0$ ومنه (C_f) فوق (Δ')

جـ)تبيّان أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,9 \prec \alpha \prec 0,91$ و $-1,66 \prec \beta \prec -1,65$.

f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}_+^*$ و $f(0,9) \times f(0,91) \prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α محصور بين $0,9$ و $0,91$ يحقق: $f(\alpha) = 0$

f متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}_-^*$ و $f(-1,66) \times f(-1,65) \prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد β محصور بين $-1,66$ و $-1,65$ يحقق: $f(\beta) = 0$

د) حساب من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(-x)+f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا.

$$f(-x)+f(x) = -x - \frac{4}{3(e^{-x}-1)} + x - \frac{4}{3(e^{x}-1)}$$

$$f(-x)+f(x) = \frac{4}{3}\left[\frac{e^x}{(e^x-1)} - \frac{1}{(e^x-1)}\right] = \frac{4}{3}$$

أي: $\boxed{f(2.0-x)+f(x) = 2(\frac{2}{3})}$

ومنه $\boxed{\text{النقطة التي احداثييها } (0;\frac{2}{3}) \text{ مركز تناظر لـ } (C_f)}$

حساب $f(\ln 3)$ ثم استنتج $f(-\ln 3)$

لدينا: $f(\ln 3) = \ln 3 - \frac{4}{3(e^{\ln 3}-1)} = \ln 3 - \frac{2}{3}$

لدينا: $f(-x)+f(x) = \frac{4}{3}$ ومنه: $f(-x) = -f(x) + \frac{4}{3}$

وعليه: $f(-\ln 3) = -f(\ln 3) + \frac{4}{3} = -\ln 3 + 2$

هـ) تبيّان أن (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 2

(C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 2

معناه المعادلة $f'(x_0) = 2$ تقبل حلا وحيدا x_0

$f'(x_0) = 2$ معناه $1 + \frac{4e^{x_0}}{3(e^{x_0}-1)^2} = 2$

معناه $3(e^{x_0}-1)^2 - 4e^{x_0} = 0$

معناه $3e^{2x_0} - 10e^{x_0} + 3 = 0$

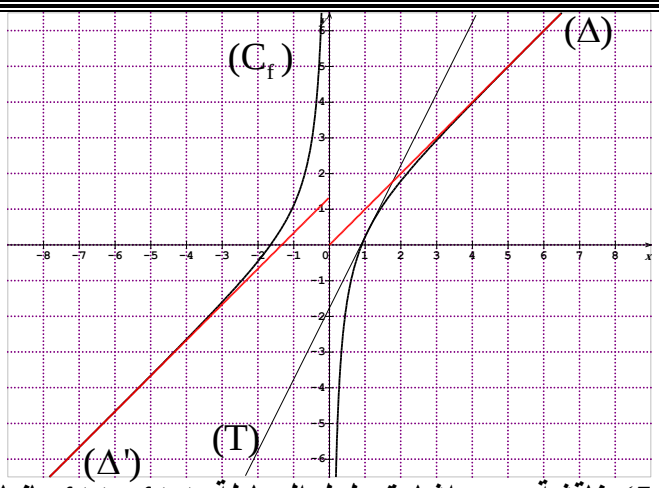
معناه $\boxed{x_0 = \ln 3}$ أو $x_0 = -\ln 3$ مرفوض

و)رسم كلا من المماس (T) و (Δ) و (Δ') ثم (C_f)

(T) يشمل النقطة التي احداثياها $(\ln 3; f(\ln 3))$ وميله 2

(Δ) يشمل النقطة التي احداثياها $(0;0)$ وميله 1

(Δ') يشمل النقطة التي احداثياها $(0;\frac{4}{3})$ وميله 1



5)مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=f(m)$ بيانيا

نضع : $f(x)=f(m)=M$ التي تكافئ $\begin{cases} y = M \\ y = f(x) \end{cases}$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = M = f(m)$

من البيان يكون للمعادلة حليّن مختلفين في الإشارة.

6) دراسة تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x.

لدينا: $g(x) = f(\ln x)$ و $D_g =]0;1[\cup]1;+\infty[$

النهايات:

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(\ln x) = -\infty$ *

لأن: $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(\ln x) = +\infty$ *

لأن: $\lim\limits_{x \to 1^-} (\ln x) = 0^-$ و $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(\ln x) = -\infty$ *

لأن: $\lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x) = 0^+$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(\ln x) = +\infty$ *

لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

اتجاه التغيير

من أجل كل $x \in D_g$: $g'(x) = \frac{1}{x} \times f'(\ln x)$

ومنه إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $f'(x)$

وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	