

ملخص حول النهايات

1. بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\begin{array}{cccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty * & \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty * & \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty * & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty * & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty * \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty * & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty * & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 * & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 * \end{array}$$

2. العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

• نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

• نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

• نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح	ح	ح	ح	ح
								ع	ع	ع	ع	ع
								ت	ت	ت	ت	ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين" (ح ع ت)

نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

قواعد إجرائية ◦ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

◦ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

نهاية دالة مركبة

مبرهنة: a, b, c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u, v, f دوال حيث $f = v \circ u$.

$$\text{إذا كانت } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \text{ و إذا كانت } \lim_{x \rightarrow b} v(x) = c \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

النهايات بالتقارن

مبرهنة 1: f, g, h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ و إذا كان من

$$\text{أجل } x \text{ كبير بالقدر الكافي } g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

مبرهنة 2: f, g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر

$$\text{الكافي } f(x) \geq g(x) \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

مبرهنة 3: f, g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر

$$\text{الكافي } f(x) \leq g(x) \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

ملاحظة: تمتد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.