تمرين 43 صفحة 29الكتاب المدرسي الجزء الأول

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=x^2-2x+1 \; ; & x\le 2 \\ f(x)=x^2+x-5 \; ; & x>2 \end{cases}$

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 2 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

الحل

تكون الدالة f مستمرة عند 2 إذا وجد مجال مفتوح يشمل 2وكان $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = f(2) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$.

لدينا

$f(2) = 2^2 - 2\times 2 + 1 = 1$

دراسة الإستمرارية على يسار 2.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} (x^2-2x+1) = 1$ إ .

بمأن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = f(2) = 1$ نستنتج أن الدالة f مستمرة على يسار2 .

دراسة الإستمرارية على يمين 2.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} (x^2+x-5\ ) = 4+2-5$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = 1 \text{ إ} .$$

بمأن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = f(2) = 1$ نستنتج أن الدالة f مستمرة على يمين 2 .

الخلاصة

بمأن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = f(2) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ نستنتج أن الدالة f مستمرة عند 2 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

لدينا الدالة $x\mapsto x^2-2x+1$ مستمرةعلى $\mathbb{R}$ وبتالى مستمرة على المجال $]-\infty\ ;\ 2\ ]$.

لدينا الدالة $x\mapsto x^2+x-5$ مستمرةعلى $\mathbb{R}$ وبتالى مستمرة على المجال $]\ 2\ ;\ +\infty\ [$.

ولدينا مما سبق الدالة الدالة f مستمرة عند 2.

إذن نستنتج أن الدالة الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 45 صفحة 25الكتاب المدرسي الجزء الأول

لتكن f الدالة المعرفة على R بالعبارة:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1} & ,si \quad x\neq 1 \\ f(1)=3 \end{cases}$$

أدرس الأستمرارية عند القيمة 1

الحل

نقول عن الدالة f انها مستمرة عند 1 إذا تحقق مايلي

- معرفة علي مجال مفتوح يشمل 1 و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

الشرط الأول محقق نحسب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ حالة عدم التعين .

إزالة حالة عدم التعين

نعلم $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ أن ومنه $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

ومنه

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

بمأن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=3$ إذن الدالة مستمرة عند القيمة1.

تمرين 104 صفحة 35الكتاب المدرسي الجزء الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} & ;\ x\neq 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}.$$

عين قيمة العدد α حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل

نقول عن الدالة f انها مستمرة عند 0 إذا تحقق مايلي

- معرفة علي مجال مفتوح يشمل 1 و $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \alpha$

الشرط الأول محقق نحسب

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} = \dfrac{0}{0}$ حالة عدم التعين .

إزالة حالة عدم التعين

ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}\times\frac{x+2+\sqrt{4+x^2}}{x+2+\sqrt{4+x^2}}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{(x+2)^2-\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4+x^2+4x-\left(4+x^2\right)}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4x}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4}{\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right] = \frac{4}{\left(0+2+\sqrt{4+0^2}\right)} = \frac{4}{2+\sqrt{4}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ مإذا تحقق $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \alpha$ أي $\alpha=1$.

تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ من أجل القيمة العدد $\alpha=1$.

تمرين 105 صفحة 35الكتاب المدرسي الجزء الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x-a & ;\ x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x^2-a+b}{x} & ;\ x\le 2 \end{cases}$$

حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان.

عين علاقة بين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند2.

الحل

تكون الدالة مستمرة عند 2 إذا وجد مجال مفتوح يشمل 2وكان $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

لدينا

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-a+b}{x}\right)=\frac{8-a+b}{2}$$.

ومن جهة أخري لدينا

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2+2x-a\ )=8-a$$.

تكون الدالة f مستمرة عند2وإذا كان كان $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ومنه $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ يعنى $8-a+b=8-a$

ومنه $b-2a=0$

النتيجة

علاقة بين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند2هى $b-2a=0$.

تطبيـق:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ ماذا تستنتج ؟
2. هل الدالة f مستمـرة على $\mathbb{R}$ ؟

الحل:

لدينا $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^2 \cos\frac{1}{x}\right)$ حالة عدم التعين لإن $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ تقبل نهايتين1أو1- فهي ليست وحيدة إذن نقول أنها حالة عدم التعين .

نتخلص من حالة عدم التعين بإستعمال نظرية الحصر

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$ ومنه $-x^2 \le x^2 \cos\frac{1}{x} \le x^2$

وبما أن $\lim_{x\to 0}\left(x^2\right) = 0$ و $\lim_{x\to 0}\left(-x^2\right) = 0$ فإنه حسب نظرية الحصر $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

وبما أن $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ والدالة معرفة عند الصفر نستنتج أن الدالة مستمرة عند الصفر 0 .

3. هل الدالة f مستمـرة على $\mathbb{R}$ ؟

نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}^*$ كما يلي $u(x) = \frac{1}{x}$ و $v(x) = \cos(x)$ حيث $(vou)(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

الدالتان $x \xrightarrow{u} \frac{1}{x}$ و $x \xrightarrow{v} \cos x$ مستمرتان على $\mathbb{R}^*$ و بالتالي الدالة المركبة vou مستمرة على $\mathbb{R}^*$

$(vou)(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

ومن جهة أخري لدينا

الدالة $x \to x^2$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بتالى مستمرة على $\mathbb{R}^*$ و hog مستمرة على $\mathbb{R}^*$ و عليه فإن جداؤهما دالة مستمرة على $\mathbb{R}^*$و بتالى f مستمرة على $\mathbb{R}^*$.

و بمأن الدالة f مستمرة عند الصفر و مستمرة على $\mathbb{R}^*$ إذن نستنتج أن الدالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

الخلاصة

الدالة f مستمـرة على $\mathbb{R}$.

تم بحمد الله وفضله