تمرين رقم 101 صفحة35 الكتاب المدرسي الجزء الأول

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f(x)\leq -4x^2$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

الحل

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$

يجب تغير شكل $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$ ثم نعين حصرا للشكل الجديد .

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\times\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}^2}$$

لدينا $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2-x^2-1}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{-1}$

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

إيجاد حصر للعدد $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$ يعنى إيجاد حصرا للعدد $-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ من أجل كل عدد حقيقي x :

ومنه نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x *فإن* : $x^2+1>x^2$ ومنه $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$ أي $\sqrt{x^2+1}>x$

بإضافة x نجد $x+\sqrt{x^2+1}>2x$

ثم بالضرب فى العدد (-1) فينتج لدينا $-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)<-2x$

وبمأن $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ إذن نستنتج أن $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ من أجل كل عدد حقيقي x.

استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f(x)\le -4x^2$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x *فإن* : $\sin x \le 1$ ومنه $1+\sin x\le 2$ أي $x(1+\sin x)\le 2x$

ومن جهة لدينا $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ من أجل كل عدد حقيقي x

إذن ينتج لدينا $x(1+\sin x)\times\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\le -2x\times 2x$ أي $\frac{x\left(1+\sin x\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}\le -4x$

ومنه استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f(x)\le -4x^2$.

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f(x)\le -4x^2$.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

أقوال فى النجاح

- ينقسم الفاشلون إلى نصفين: هؤلاء الذين يفكرون ولا يعملون، وهؤلاء الذين يعملون ولا يفكرون أبداً. (جون تشارلز سالاك)

- يجب أن تثق بنفسك .. وإذا لم تثق بنفسك فمن ذا الذي سيثق بك !!؟؟

- ما الفشل إلا هزيمة مؤقتة تخلق لك فرص النجاح.

- لا يصل الناس إلى حديقة النجاح دون أن يمروا بمحطات التعب والفشل واليأس، وصاحب الإرادة القوية لا يطيل الوقوف في هذه المحطات.

-

- **تمرين رقم 41 صفحة30 الكتاب المدرسي الجزء الأول**

f دالة معرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{2x+1}$

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-\frac{1}{2}$: $\dfrac{x-1}{2x+1}\le f(x)\le\dfrac{x+1}{2x+1}$

2) هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الحل

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-\frac{1}{2}$: $-1\le\sin x\le 1$

و منه فإن من أجل كل عدد حقيقي $x>-\frac{1}{2}$: $x-1\le x+\sin x\le x+1$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي $x>-\frac{1}{2}$ ، $\dfrac{x-1}{2x+1}\le\dfrac{x+\sin x}{2x+1}\le\dfrac{x+1}{2x+1}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي $x>-\frac{1}{2}$ أي $\dfrac{x-1}{2x+1}\le f(x)\le\dfrac{x+1}{2x+1}$

2. بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)=\dfrac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)=\dfrac{1}{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

إذن تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ تساوي $\frac{1}{2}$

- عندما أقوم ببناء فريق فأني أبحث دائما عن أناس يحبون الفوز ، وإذا لم أعثر على أي منهم فأنني ابحث عن أناس يكرهون الهزيمة (روس بروت(
- يلوم الناس ظروفهم على ما هم فيه من حال.. ولكني لا أؤمن بالظروف فالناجحون في هذه الدنيا أناس بحثوا عن الظروف التي يريدونها فإذا لم يجدوها وضعوها بأنفسهم.
(برنارد شو)
- عليك أن تفعل الأشياء التي تعتقد أنه ليس باستطاعتك أن تفعلها .(روزفلت)

تمرين رقم 90 صفحة34 الكتاب المدرسي الجزء الأول

بين باستعمال طريقة مناسبة أن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$

الحل

نغير كتابة $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} \times \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}}$$

لدينا $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \dfrac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \dfrac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}}$

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin x} = \dfrac{2}{1} = 2$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}\sqrt{1+\cos x}$$

ومنه

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{1+\cos 0} = 2\sqrt{2}$$

ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$

قد يتقبل الكثيرون النصح ، لكن الحكماء فقط هم الذين يستفيدون منه (بابليليوس سيرس)