تمارين أمثلة وطرائق

. باستعمال المرافق

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2;+\infty[$ بِـ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}$

- تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤول x إلى $+\infty$.
- بين أنه من أجل كل x من $[2;+\infty[$، $f(x)=\dfrac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$
- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x^2-2x}\right)=-\infty$ ومنه

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)=+\infty-\infty$.وهي حالة عدم التعين من الشكل $+\infty-\infty$.

بإستعمال المرافق نحصل على

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$f(x)=\frac{x^2+1-\left(x^2-2x\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}=\frac{2x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$f(x)=\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}$$

$$f(x)=\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

إزالة حالة عدم التعين

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

نعلم أن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{x^n}\right)=0$ إذن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

ماذا يجب أن تعلم

يمكن كتابة $\sqrt{ax^2+bx+c}$ **على الشكل** $\sqrt{ax^2+bx+c} = |x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$

إذا كنا نحسب فى النهاية بجوار $+\infty$ **فإنه يمكن كتابة على الشكل** $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$

إذا كنا نحسب فى النهاية بجوار $-\infty$ **فإنه يمكن كتابة على الشكل** $\sqrt{ax^2+bx+c} = -x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$

لإن $|x|$ **هى** x **بجوار** $+\infty$ **أو** $-x$ **بجوار** $-\infty$.

تطبيق:

أدرس النهاية عند $-\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بِـ $g(x)=x+2+\sqrt{x^2+x}$.

الحل

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}\right)=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$ ومنه

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\sqrt{x^2+x}\right)=-\infty+\infty$ وهي حالة عدم التعين من الشكل $-\infty+\infty$.

بإستعمال المرافق نحصل على

$$g(x)=x+2+\sqrt{x^2+x}$$

$$g(x)=x+2+\sqrt{x^2+x}\times\frac{x+2-\sqrt{x^2+x}}{x+2-\sqrt{x^2+x}}$$

$$g(x)=\frac{(x+2)^2-\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2}{x+2-\sqrt{x^2+x}}$$

$$g(x)=\frac{x^2+4x+4-\left(x^2+x\right)}{x+2-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$g(x)=\frac{3x+4}{x+2-(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x+2+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$g(x)=\frac{3x+4}{x\left(1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$g(x)=\frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + 0}{1 + 0 + \sqrt{1 + 0}} = \frac{3}{2}$$

نعلم أن $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a}{x^n} \right) = 0$ إذن

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \frac{3}{2}$$

ومنه $\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = \frac{3}{2}}$

تمرين رقم 83 صفحة 33الكتاب المدرسي الجزء الول

باستعمال المرافق احسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ ، $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ،

$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x+2}$ ، $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x$

$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+3}$ ، $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$ حيث $a>0$ و $b>0$

الحل بشكل مختصر

سوف نعطى حلول مختصرة ويجب على الطالب إتباع الطرق السابقة لتأكد من النتائج

أولا $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ حالة عدم التعين من الشكل $+\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=0$$

ثانيا $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x+2}$ حالة عدم التعين من الشكل $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{0+1}+1\right)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

ثالثا $\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x+2}$

$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x+2}$ حالة عدم التعين من الشكل $\infty-\infty+$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x+2} = \lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x+2} \times \frac{x^2+\sqrt{x+2}}{x^2+\sqrt{x+2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x-2}{x^2+\sqrt{x+2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^4}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2\right) = +\infty$$

رابعا $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x$

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x$ حالة عدم التعين من الشكل $-\infty+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x \times \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1+0}{-\left(\sqrt{1}+1\right)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x = -\frac{1}{2}$$

خامسا $\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+3}$

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x$ حالة عدم التعين من الشكل $-\infty+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+3}=\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+3}\times\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+3}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-3}{x-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x+x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=\frac{-3}{-\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+3}=0$$

، سادسا $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$ حيث $a>0$ و $b>0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$ حالة عدم التعين من الشكل $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}\times\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+b^2}+b}\times\frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^2-a^2}{\left(\sqrt{x^2+b^2}\right)^2-b^2}\times\frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+a^2-a^2}{x^2+b^2-b^2}\times\frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a}=\frac{\sqrt{0+b^2}+b}{\sqrt{0+a^2}+a}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}$$