أمثلة وتمارين و طرائق

. باستعمال العدد المشتق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـِ $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$

- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند 0 مباشرة ؟ لماذا ؟
- باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x\mapsto\cos x$ عين نهاية الدالة f عند 0.

الحل

لا يمكن حساب نهاية الدالة f عند 0 مباشرة.

بمأن بـِ $\lim\limits_{x\to0}(\cos x-1)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}(x)=0$

إذن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x}$ وهى من حالات عدم التعين من الشكل $\dfrac{0}{0}$.

- باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x\mapsto\cos x$ عين نهاية الدالة f عند 0.

نضع $g(x)=\cos x$ ومنه $g(0)=\cos 0=0$

إذن حسب تعريف العدد المشتق للدالة عند الصفر نلاحظ

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$$

وبمأن $g'(x)=-\sin x$ إذن ومنه $g'(0)=-\sin 0=0$

إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0}$

تطبيق: أدرس النهاية عند 0 للدالة g المعرفة على $[-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـِ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

الحل

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ وهى من حالات عدم التعين من الشكل $\dfrac{0}{0}$.

- بإستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x\mapsto\sqrt{x+4}$ نعين نهاية الدالة f عند 0 .

نضع $g(x)=\sqrt{x+4}$ ومنه $g(0)=\sqrt{4}=2$

إذن حسب تعريف العدد المشتق للدالة g عند الصفر نلاحظ

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$$

وبمأن $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$ إذن ومنه $g'(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$

إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\dfrac{1}{4}}$

تمرين محلول

باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ ، $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ ،

الحل

لدينا $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ وهي من حالات عدم التعين من الشكل $\dfrac{0}{0}$.

- بإستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$ نعين نهاية الدالة عند1.

نضع $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ ومنه $g(0)=\sqrt{2}$

إذن حسب تعريف العدد المشتق للدالة g عند الواحد نلاحظ

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(0)$$

وبمأن $g'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{x^2+1}}$ إذن ومنه $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

لدينا $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ وهي من حالات عدم التعين من الشكل $\dfrac{0}{0}$.

- بإستعمال تعريف العدد المشتق عند 3 للدالة $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$ نعين نهاية الدالة عند 3.

نضع $g(x)=x\sqrt{x+1}$ ومنه $g(3)=3\sqrt{4}=6$

إذن حسب تعريف العدد المشتق للدالة g عند 3 نلاحظ

$$\lim_{x\to3}\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)$$

وبمأن $g'(x)=x\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}$ إذن ومنه $g'(3)=g'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{4}}+\sqrt{4}=\dfrac{3}{4}+2=\dfrac{11}{4}$

إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}=\dfrac{11}{4}}$

تمرين رقم **88** صفحة**34** الكتاب المدرسي الجزء الأول

باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{3}$ لكل من الدالتين $x \mapsto \sin 3x$ و $x \mapsto 2\cos x - 1$ ،

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1}$

الحل

نضع $f(x) = \sin 3x$ ومنه $f(\frac{\pi}{3}) = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = \sin \pi = 0$

ومنه $f'(x) = 3\cos 3x$ إذن $f'(\frac{\pi}{3}) = 3\cos 3\frac{\pi}{3} = 3\cos \pi = -3$

إذن حسب تعريف العدد المشتق للدالة f عند الصفر $\frac{\pi}{3}$ نلاحظ

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x - \sin \pi}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = 3\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times -1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f(x)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = -3$$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = -3}$

ثانيا

نضع $g(x)=2\cos x-1$ ومنه $g(\frac{\pi}{3})=2\cos\frac{\pi}{3}-1=2\times\frac{1}{2}-1=1-1=0$

ومنه نضع $g'(x)=-2\sin x$ ومنه $g'(\frac{\pi}{3})=-2\sin\frac{\pi}{3}=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

إذن حسب تعريف العدد المشتق للدالة g عند الصفر $\frac{\pi}{3}$ نلاحظ

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1-0}{x-\frac{\pi}{3}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}=g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3}$$

إذن $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3}}$

لدينا $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1}$ و هي من حالات عدم التعين من الشكل $\frac{0}{0}$.

إزالة حالة عدم التعين

نقسم البسط والمقام على $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ومنه نجد

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} = \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

لدينا

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

إذن $\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} = -\sqrt{3}}$

تم بحمد الله