تمارين أمثلة و طرائق

. باستعمال التحليل

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـِ $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$

- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$ مباشرة ؟ لماذا ؟
- بين أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f(x)=x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$.
- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لا يمكن حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ مباشرة.

بمأن بـِ $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x^2+x-2}\right)=-\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right)$ وهي من حالات عدم التعين .

- بين أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f(x)=x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$.

لدينا بـِ

$$f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$$

$$f(x)=2x+1-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

$$f(x)=2x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

$$f(x)=x\left[2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right]$$

بمأن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{x}\right)=0$ فإن .

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right]$$

$$f(x)=+\infty$$

نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $\boxed{f(x)=+\infty}$.

تطبيق:

أدرس النهاية عند $+\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـِ $g(x)=x+2-\sqrt{x}$.

الحل

بمأن بـِ $\lim_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ و ِ $\lim_{x\to+\infty}(-\sqrt{x})=-\infty$.

إذن $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2-\sqrt{x})$ وهى من حالات عدم التعين .

لدينا

$$g(x)=x+2-\sqrt{x}$$

$$g(x)=x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

$$g(x)=x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}\right)$$

$$g(x)=x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

إزالة حالة عدم التعين

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\sqrt{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

ومنه

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$$

بعض الأمثلة

أحسب النهايات الثالية

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+x+1}+x \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-3x \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5}-x$$

الحل

1-لدينا $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5}-x$ هى حالة عدم التعين من الشكل $+\infty-\infty$

إزالة حالة عدم التعين

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5}-x = \lim_{x\to+\infty} \left[x\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-x\right]$$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5}-x = \lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-1\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5}-x = +\infty\left[\sqrt{4+0}-1\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5}-x = +\infty$$

2-لدينا $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-3x$ هى حالة عدم التعين من الشكل $+\infty-\infty$

إز الة حالة عدم التعين

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-3x = \lim_{x\to+\infty} \left[x\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}-3x\right]$$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-3x = \lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}-3\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-3x = +\infty\left[\sqrt{2-0}-3\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-3x = -\infty$$

3-لدينا $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+x+1}+x$ هى حالة عدم التعين من الشكل $+\infty-\infty$

إزالة حالة عدم التعين

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+x+1}+x = \lim_{x\to-\infty} \left[x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right]$$

لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+x+1}+x = \lim_{x\to-\infty} x\left[\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+x+1}+x = \lim_{x\to-\infty} x\left[\sqrt{2+0+0}+1\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+x+1}+x = -\infty$$