La Dérivation تعود على العادات الحسنه وهي سوف تصنعك **الاشتقاقية**

العدد المشتق – الدالة المشتقة Nombre Dérivé-Fonction Dérivé:

f دالة معرفة على المجال I من R . a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$.

نقول ان f تقبل الإشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة عند ما يؤول h الى 0. تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a ونكتب: $f'(a)$ أي $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ أو $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

التفسير الهندسي يمثل العدد $f'(a)$ معامل توجيه المماس (ميل) عند النقطة ذات الفاصلة a

معادلة المماس L'équation De La Tangente

f دالة معرفة على المجال I من R وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم (O,i,j) .

اذا قبلت f الإشتقاق عند x_0 فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0,f(x_0))$ مماسا

معادلته : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

مثال 01:

أدرس قابلية إشتقاق الدوال التالية f، g و k عند 1 مفسرا بيانيا في كل مرة النتيجة المحصل عليها و أكتب معادلة المماس فى كل حالة $f(x)=-x^2+2$ ، $g(x)=\sqrt{x-1}$ ،.

الحل : **الحالة الأولى** $f(x)=-x^2+2$ لدينا $f(1)=1$

$\frac{f(h+1)-f(1)}{h}=\frac{-(h+1)^2+2-1}{h}=\frac{-2h-h^2}{h}=-2-h$ ومنه : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-1)-f(-1)}{h}=-2$ أي $f'(-1)=2$

ومنه f قابلة للإشتقاق عند و تقبل مماس (T) معامل توجيهه $f'(-1)=2$

معادلته المماس (T) عند $x=1$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=-2(x-1)+1$ ومنه $(T):y=-2x+3$

ملاحظة

المماس الموازي لحامل محور الفواصل:

إذا كانت نهاية النسبة $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0$ فإن المنحنى (C) يقبل عند النقطة $A(a,f(a))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

الحالة الثانية $g(x)=\sqrt{x-1}$ **لدينا** $g(1)=0$

$\frac{g(h+1)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{h+1-1}-0}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$ ومنه : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(h+1)-f(1)}{h}=+\infty$ أي

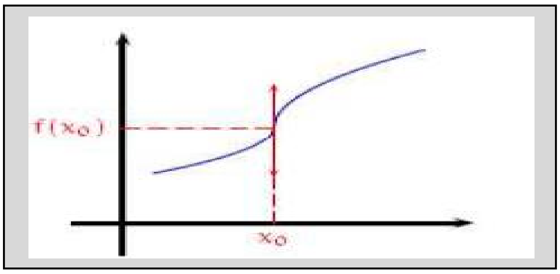
f غير قابلة للإشتقاق عند (1) و المنحنى (C) يقبل عند النقطة $A(1,0)$ نصف مماسا يوازي حامل محور التراتيب .

ملاحظة معادلة المماس تكون من الشكل $x=a$ أي $x=1$

المماس الموازي لحامل محور التراتيب:

إذا كانت نهاية النسبة $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$ فإن المنحنى (C) يقبل عند النقطة $A(a,f(a))$ مماسا يوازي حامل محور التراتيب .

معادلة المماس تكون من الشكل $x=a$ أنظر لشكل المقابل



إن أعظم اكتشاف لجيلي ، هو أن الإنسان يمكن أن يغير حياته ، إذا ما استطاع أن يغير اتجاهاته العقلية

(وليام جيمس)

قابلية الأشتقاق على اليمين وعلى اليسار

● اذا كان $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$ فإن الدالة f قابلة لأشتقاق علي يمين a و**تقبل نصف مماس معامل توجيهه** ℓ

● اذا كان $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell'$ فإن الدالة f قابلة لأشتقاق علي يسار a **و تقبل نصف مماس معامل توجيهه** ℓ'

● اذا كان $\ell=\ell'$ فإن الدالة f قابلة لأشتقاق عند a و تقبل مماس معامل توجيهه l أو l' يشمل لنقطة $A(a,f(a))$

● اذا كان $\ell\neq\ell'$ فإن الدالة f غير قابلة لأشتقاق عند a و تقبل نصفي مماسين معامل توجيهه l و l' و النقطة $A(a,f(a))$ هي **نقطة الزاوية**

مثال 01: إذا لم تحاول أن تفعل شيء أبعد مما قد أتقنته .. فأنك لا تتقدم أبدا (رونالد .اسبورت)

أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية f، g و k عند 1 مفسرا بيانيا في كل مرة النتيجة المحصل عليها و أكتب معادلة المماس في كل حالة $f(x)=2x|x-1|$ ، $g(x)=\sqrt{|x-1|}$.

الحياة إما أن تكون مغامرة جرئية ... أو لا شيء
(هيلين كيلر)

الحالة * $f(x)=2x|x-1|$

من أجل $h>0$ ، $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{2(h+1)|h|}{h}=2(h+1)$

من أجل $h<0$ ، $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{2(h+1)|h|}{h}=-2(h+1)$

أولا $\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{2(h+1)|h|}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}-2(h+1)=-2$

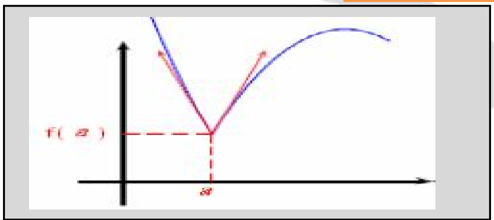
منه f قابلة للإشتقاق عند يسار (1) و المنحنى (C) يقبل عند النقطة $A(1,0)$ نصف مماسا معامل توجيهه -2

معادلته المماس من الشكل $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=-2(x-1)+0$ ومنه $(T):y=-2x+2$

ومنه $\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{2(h+1)|h|}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}2(h+1)=2$

ثانيا f قابلة للإشتقاق على يمين (1) و المنحنى (C) يقبل عند النقطة $A(1,0)$ نصف مماسا معامل توجيهه 2.

معادلته من الشكل $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=2(x-1)+0$ ومنه $(T'):y=2x-2$



-D

الخلاصة الدالة f غير قابلة لأشتقاق عند (1)

و تقبل نصفي مماسين ميلهما 2-و 2 و النقطة $A(1,0)$

هي نقطة **الزاوية للمنحنى** (C). **أنظر لشكل**

الحالة 2 $g(x)=\sqrt{|x-1|}$

$$\frac{g(h+1)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{|h+1-1|}-0}{h}=\frac{\sqrt{|h|}}{h}=\frac{|h|}{h\sqrt{h}}$$

ومنه $\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{g(h+1)-f(1)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{-h}{h\sqrt{h}}=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{-1}{\sqrt{h}}=-\infty$ منه f غير قابلة للإشتقاق عند يسار (1) و المنحنى (C) يقبل عند النقطة $A(1,0)$ نصف مماسا يوازي حامل محور التراتيب $[y'o)$.

ومنه $\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{g(h+1)-f(1)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h}{h\sqrt{h}}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$ منه f غير قابلة للإشتقاق على يمين (1) و المنحنى (C) يقبل عند النقطة $A(1,0)$ نصف مماسا يوازي حامل محور التراتيب $[oy)$.

الخلاصة الدالة f غير قابلة لأشتقاق عند (1) و تقبل نصفي مماسين يوازيان محور حامل محور التراتيب و النقطة $A(1,0)$ هي **نقطة الرجوع للمنحنى** (C).

إن الإجابة الوحيدة على الهزيمة هي الانتصار (ونستون تشرشل).

الإشتقاقية والإستمرار :

إذ كانت f قابلة للإشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال عكس هذه الخاصية ليس صحيح دائما

فمثلا الدالة $|X|:X\longrightarrow|X|$ مستمرة عند الصفر لكنها غير قابلة للإشتقاق .

نقطة الأنعطاف Point D'infliction:

f دالة معرفة على المجال I من R وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم (O,i,j) .
و f'' دالتها المشتقة الثانية . $A(a,f(a))$ نقطة من المنحنى (C)
اذا انعدمت f'' عند القيمة a وغيرت من إشارتها فإن النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة انعطاف للمنحنى (C).

مثال 05: نعتبر الدالة f معرفة على R ب: $f(x)=x^3+3x^2-4$.
** أثبت أن النقطة $Q(-1,-2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

الحل : f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق مرتين على R.
- $f''(X)=6X+6$ نلاحظ أن f'' دالة كثير حدود من الدرجة الأولى ينعدم ويغير من إشارته عند (-1) ومنه النقطة $Q(-1,-2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

مشتقات دوال مألوفة Regles DE Dérivation

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الإشتقاق
k	0	R
X	1	R
x^n	nx^{n-1}	R
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	R
$\sin x$	$\cos x$	R

العمليات على الدوال المشتقة: Derivées et Opérations Sur Les Fopnction

u و v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال I من R و k عدد حقيقي .

الدالة	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	ku	uv	$u+v$
الدالة المشتقة	$\frac{-v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	ku'	$uv'+vu'$	$u'+v'$

مشتق دالة مركبة Derivée D'une Fonction Composée

لتكن الدالة g قابلة للاشتقاق عند I و الدالة f قابلة للاشتقاق $g(I)$ ادا الدالة fog قابلة للشتقاق عند I

$$(fog)'(x)=f'[g(x)].g'(x)$$

نتائج Conséquence

الدالة	$\sin'(ax+b)$	$\cos'(ax+b)$	$u(x)^{n'}$	$\frac{1}{u(x)^n}$	$\sqrt{u(x)}'$
الدالة المشتقة	$a\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$n\times u'(x)\times u(x)^{n-1}$	$\frac{-n\times u'(x)}{u(x)^{n+1}}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

بعض

- $\left[(x+1)\sqrt{x}\right]'=\sqrt{x}+(x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $3\cos'(4x+\pi)=-12\sin(4x+\pi)$
- $\sin'(5x+7)=7\cos(5x+7)$
- $\left[\sqrt{\cos(3x-4)}\right]'=\frac{-3\sin(3x-4)}{2\sqrt{\cos(3x-4)}}$
- $\left[\frac{1}{(\cos x)^4}\right]'=\frac{-1\times 4\times -\sin x}{(\cos x)^5}$
- $\left[\frac{8}{(5x-2)^4}\right]'=\frac{-8\times 4\times 7}{(7x-2)^5}$
- $\left(2x^2-x+3\right)^{4'}=4(4x-1)\left(2x^2-x+3\right)^3$
- $\cos^3(x)'=-3\sin x\cos^2(x)$
- $(3x+5)^{7'}=7\times 3\times(3x+5)^6$
- $\left[(2x+3)\sin 5x\right]'=2\sin 5x+5(2x+3)\sin 5x$
- $\left[\sqrt{x^3+4x^2+5}\right]'=\frac{3x^2+8x}{2\sqrt{x^3+4x^2+5}}$
- $\frac{1}{(x^2-1)^3}=-\frac{3(2x)}{(x^2-1)^4}=-\frac{6x}{(x^2-1)^4}$

لا يصل الناس إلى حديقة النجاح دون أن يمروا بمحطات التعب والفشل واليأس، وصاحب الإرادة القوية لا يطيل الوقوف في هذه المحطات.

** الدوال كثيرات الحدود قابلة للإشتقاق على R
** الدوال الناطقة قابلة للإشتقاق على مجال تعريفها.

نتيجة 04:

f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال I من R . إذا قبلت الدالة f' الإشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى الدالة المشتقة الثانية ونرمز لها بالرمز f'' إذا قبلت الدالة f'' الإشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى الدالة المشتقة الثالثة ونرمز لها بالرمز $f^{(3)}$

تسمى الدوال : $f';f'';f^{(3)};............;f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f.

إننا ندفع ثمنا غالياً من جراء خوفنا من الفشل. إنه عائق كبير للتطور يعمل على تضييق أفق الشخصية ويحد من الاستكشاف والتجريب، فلا توجد معرفة تخلو من صعوبة وتجربة من الخطأ والصواب .... وإذا أردت الاستمرار في المعرفة عليك أن تكون مستعداً طيلة حياتك لمواجهه خطورة الفشل.
(جون جاردينر)

مثال 04:

نعتبر الدالة f معرفة على R ب: $f(x)=\cos x$.

1- عين الدوال : $f';f'';f^{(3)};f^{(4)}$.

2- اعط تخمينا حسب قيم العدد الطبيعي الغير معدوم n لعبارة $f^{(n)}$

الحل :

1- $f'(x)=-\sin x \,;f''(x)=-\cos x\,;f^{(3)}(x)=\sin x\,;f^{(4)}(x)=\cos x$

2- $$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\cos x \,, n=4k\\ -\sin x \,, n=4k+1\\ -\cos, n=4k+2\\ \sin x \,, n=4k+3\end{cases}$$

مبرهنة Dérivée et sens De Variation :

f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال I من R.

** إذا كان من أجل كل x من I : $f'(x)\succ 0$ ماعدا عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f' من أجلها فإن الدالة f متزايدة تماما على I

** إذا كان من أجل كل x من I : $f'(x)\prec 0$ ماعدا عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f' من أجلها فإن الدالة f متناقصة تماما على I

** إذا كان من أجل كل x من I : $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I

قيمة حدية محلية Dérivée et Extremum Local :

f دالة معرفة على المجال I من R.

** القول أن : $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى للدالة f يعني انه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من اجل كل x من J : $f(x)\le f(x_0)$

** القول أن : $f(x_0)$ قيمة حدية صغرى للدالة f يعني انه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من اجل كل x من J : $f(x)\ge f(x_0)$

** القول أن : $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f يعني ان $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى للدالة f أو قيمة حدية صغرى للدالة f.

مبرهنة :

f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال I من R.

x_0 عدد حقيقي من I . اذا انعدمت f' عند القيمة x_0 وغيرت من إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f.

*افعل الشيء الصحيح فإن ذلك سوف يجعل البعض ممتناً بينما يندهش الباقون (مارك توين)
*أن العالم يفسح الطريق للمرء الذي يعرف إلى أين هو ذاهب (رالف و.أمرسون)