

تعريف:

f دالة مجموعة تعريفها I و a عدد حقيقي غير معزول من I .
القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ يعني أن } f \text{ مستمرة عند } a$$

ملاحظة: القول أن f مستمرة على مجال $J \subset I$ يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من J .

التفسير البياني: تكون الدالة f مستمرة على مجال $J \subset I$ عندما يمكن رسمها على هذا المجال دون رفع القلم.

تمرين 01:

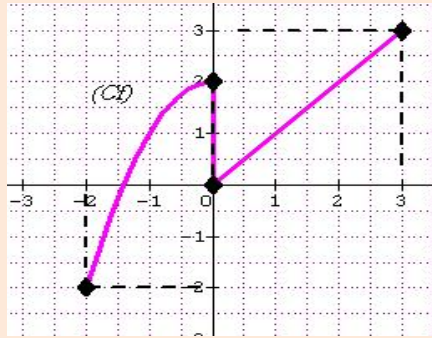
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & , x \in [-2, 0[\\ x & , x \in [0, 3] \end{cases}$$

لتكن f الدالة المعرفة على: $[-2, 3]$ ب:

1- مثل بيانيا الدالة f . هل تقبل الدالة f نهاية عند 0؟

2- هل الدالة f مستمرة على المجال: $[-2, 3]$ ؟ أذكر مجالا تكون فيه الدالة مستمرة.

الحل: 1-



** أنظر الشكل. لدينا من جهة $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ و من جهة ثانية $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

اذن الدالة f لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.

2- الدالة f غير مستمرة عند 0 وبالتالي فهي غير مستمرة على المجال: $[-2, 3]$.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال: $[0, 3]$.

تمرين 02

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = 4 & \end{cases}$$

لتكن f الدالة المعرفة على: R ب

أدرس الأستمرارية عند القيمة 2

الحل

نقول عن الدالة f انها مستمرة عند القيمة 2 اذا تحقق مايلي أولا f معرفة علي مجال مفتوح يشمل 2

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \quad \text{ثانيا}$$

الشرط الأول محقق نحسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ ح.ع.ت}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

بمأن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ فإن الدالة مستمرة عند $x = 2$

لدينا

من ضيع حرثه .. ندم يوم حصاده

الأستمرار على اليمين في a

نقول عن الدالة f انها مستمرة على يمين القيمة a اذا تحقق ماسيلي

- f معرفة عند القيمة a و على الجوار الأيمن ل a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

الأستمرار على اليسار في a

نقول عن الدالة f انها مستمرة على يسار القيمة a اذا تحقق مايلي

- f معرفة عند القيمة a و على الجوار الأيسر ل a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

نظرية

تكون الدالة f مستمرة عند القيمة a إذا كانت f مستمرة على يمين القيمة a و f مستمرة على يسار القيمة a

ملاحظة

إذا كانت الدالة f غير مستمرة على اليمين a او غير مستمرة على اليسار a فهي غير مستمرة عند القيمة a

هندسيا

• إذا كانت الدالة مستمرة على مجال I فان منحناها لا ينقطع عند أي نقطة ذات الفاصلة x من المجال I

بطريقة اتخري يمكن رسم منحنى الدالة a دون رفع القلم

• إذا كانت الدالة f مستمرة على اليمين في a فقط او مستمرة على اليسار في a فقط فان النقطة $A(a, f(a))$

هي نقطة توقف للمنحنى

تمرين تطبيقي 03

لتكن الدالة f المعرفة على R : ب $\begin{cases} f(x) = 3x^2 + 4x - 1, x \leq 1 \\ f(x) = 3 + \sqrt{x-1}, x > 1 \end{cases}$

أدرس الأستمرارية عند القيمة 1

الحل

تكون الدالة مستمرة عند القيمة إذا وجد مجال مفتوح يشمل وكان 1 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

لدينا $f(1) = 6$ ومن جهة أخرى لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 4x - 1) = 6 \text{ ومنه الدالة } f \text{ مستمرة على يسار 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3 + \sqrt{x-1}) = 3 \text{ ومنه الدالة } f \text{ غير مستمرة على يمين 1}$$

النتيجة بمأن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ فان f غير مستمرة عند 1

تمرين تطبيقي 04 لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي: $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 ; & x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + x + a ; & x > 2 \end{cases}$

(1) عين العدد a حت تكون f مستمرة عند 2 .

تكون الدالة مستمرة عند القيمة 2 إذا تحقق مايلي $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 1) = 1 \text{ ولدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + a) = 6 + a \text{ لدينا}$$

ومنه حتى تكون الدالة مستمرة عند القيمة 2 إذا وفقط إذا تحقق $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$6 + a = 1 \text{ أي } a = -5 \text{ وبتالى فإن}$$

الأستمرار على مجال

● الدوال المرجعية مستمرة على مجال تعريفها.

** الدوال كثيرات الحدود ، SIN ، COS مستمرة على R .

** الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على مجال تعريفها.

◆ **أمثلة:** الدالة $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ مستمرة على R لأنها دالة كثير الحدود.

الدالة $x \mapsto \frac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty; -1[$ ، $]-1; 1[$ و $]1; +\infty[$ لأنها دالة ناطقة.

عمليات على الدوال المستمرة

الدالتين F و G مستمرتين على مجال I و k عدد حقيقي فإن

● الدوال $k.F$; $G.F$; $G + F$ مستمرة على المجال I .

● الدالة F/G مستمرة على المجال I إذا كانت لا تنعدم على المجال I .

● الدالة $F \circ G$ تكون مستمرة على المجال I إذا وفقط إذا كانت G مستمرة على $F(I)$.

● الدالة $F \circ G$ تكون مستمرة عند القيمة a إذا وفقط إذا كانت G مستمرة عند القيمة a والدالة F مستمرة على $G(a)$.

مثال تطبيقي نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x) = (x^2 + x + 3)\cos x$ لماذا الدالة f مستمرة على R ؟

بمأن الدالة $x \mapsto x^2 + x + 3$ مستمرة على R لأنها دالة كثير الحدود و الدالة $x \mapsto \cos x$ مستمرة على R

إذن جداؤهما $x \mapsto (x^2 + x + 3)\cos x$ هو دالة مستمرة على R ومنه نستنتج أن الدالة f مستمرة على R .

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على R و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n

حيث $n \leq x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[]$.

(1) أمثلة $[-2, 3]$ ، $E(-1) = -1$ ، $E(-11, 01) = -12$ ، $E(\sqrt{3}) = 1$ و $E(11, 01) = 11$.

تمرين تطبيقي 3:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; 2]$ بـ: $f(x) = xE(x) + 1$ حيث الدالة $E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1; 0[$ ، $[0; 1[$ و $[1; 2]$.

2. أرسم في معلم $(O; I, J)$ المنحني الممثل للدالة f .

3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1; 1]$ ؟ على المجال $[-1; 2]$ ؟

الحل

1. من أجل $x \in [-1; 0[$ لدينا $E(x) = -1$ ومنه $f(x) = -x + 1$

من أجل $x \in [0; 1[$ لدينا $E(x) = 0$ ومنه $f(x) = 1$

من أجل $x \in [1; 2]$ لدينا $E(x) = 1$ ومنه $f(x) = x + 1$

2. انظر الشكل المقابل.

3. نعم الدالة f مستمرة على المجال $[-1; 1]$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحني في هذا المجال دون رفع القلم.

الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-1; 2]$ لأنها غير مستمرة عند 1 كما نلاحظ أنه لا يمكن رسم منحنيها

البياني دون رفع القلم. **اللسان ليس عظاماً لكنه يكسر العظام**

نتعلم لنغير حاضرننا ونبني مستقبلنا

تمارين تطبيقية على الإستمرارية

التمرين الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على R

أدرس الإستمرارية الدالة عند القيمة x_0 فى الحالات التالية

$$(1): \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

$$x_0 = 1 \quad (3): \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$(2): \begin{cases} f(x) = x + 3x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$x_0 = 1 \quad (4): \begin{cases} f(x) = |x| \frac{\sqrt{x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

التمرين الثانى

نعتبر الدالة f المعرفة على R

عين قيمة العدد a تكون الدالة مستمرة على فى الحالات التالية

$$(1): \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = a \end{cases}$$

$$x_0 = -1 \quad (2): \begin{cases} f(x) = x^2 + 3x + a & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

التمرين ثالث

نعتبر الدالة f المعرفة على R

عين قيمة العدد a تكون الدالة مستمرة عند القيمتين -1 و 1 فى الحالة التالية

$$\begin{cases} f(x) = 2x + a + 1 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \frac{ax - b + a}{x^2 + 4} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = x^2 + \sqrt{x + 3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

تمرين الرابع

f دالة معرفة على R كمايلي بـ: $f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$

- أدرس استمرار الدالة f على R

تمرين الخامس

f دالة معرفة على R كمايلي بـ: $f(x) = (x^2 + 2x) \sin x$

- أدرس استمرار الدالة f على R

التمرين السادس

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2; 1]$ كما يلي: $f(x) = x(x + E(x))$ حيث $x \mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح

(1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-2; -1]$ ، $[-1; 0]$ ، $[0; 1]$

(2) ارسم في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المنحني الممثل للدالة f .

(3) هل الدالة f مستمرة على $[-2; -1]$ ، $[-2; 0]$ ، $[-2; 1]$ ؟

حجج السيد هاج