

التمرين 01 :

عين النهاية عند $+\infty$ والنهاية عند $-\infty$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = 5x^2, f(x) = -3x^2, f(x) = 7x^3, f(x) = -0,5x^3, f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \sqrt{2}$$

$$f(x) = 3x - 200, f(x) = \frac{-3x^2 + 1}{6000}, f(x) = -\sqrt{3}x^3 + \frac{3}{5}, f(x) = \frac{5}{7}x^3 + \frac{8\sqrt{2}}{2}$$

الجواب :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التمرين 02 : أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - x^2 - 3x + 2), \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^2 + 8x - 2), \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x^3 + 8x^2 - x - 1), \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 18x^2 - x\sqrt{2} + 10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (19x^2 + 5x - 3), \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^6 + x^4 - 3x^2), \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 + 2x^2 - x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - x^2 - 3x + 2) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^2 + 8x - 2) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 5) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 18x^2 - x\sqrt{2} + 10) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 + 2x^2 - x - 1) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x^3 + 8x^2 - x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (19x^2 + 5x - 3) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^6 + x^4 - 3x^2) = -\infty$$

التمرين 03 :

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{-3x+1}{4x^2-4x+1} \right), \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \left(\frac{-7}{x+4} \right), \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \left(\frac{-3x+2}{2+x} \right), \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(3 + \frac{5}{2x-2} \right)$$

$$, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+5x}{4x-x^2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+8}{4x-2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{3x-1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-10}{x^3-x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2x^5}{x^3+x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2-3x+4}{16-x^4}$$

الجواب :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \left(\frac{-7}{x+4} \right) = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \left(\frac{-3x+2}{2+x} \right) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(3 + \frac{5}{2x-2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{3x-1} = \frac{2}{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-10}{x^3-x^2} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{-3x+1}{4x^2-4x+1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2-3x+4}{16-x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+5x}{4x-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+8}{4x-2} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2x^5}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

التمرين 04 :

في الأشكال (1)، (2)، (3)، (4)، (5) الموائية (C) هو التمثيل البياني لدالة f بالنسبة إلى معلم $(0, I, J)$

بالإعتماد على الشكل (1) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (2) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (3) عين النهايات التالية:

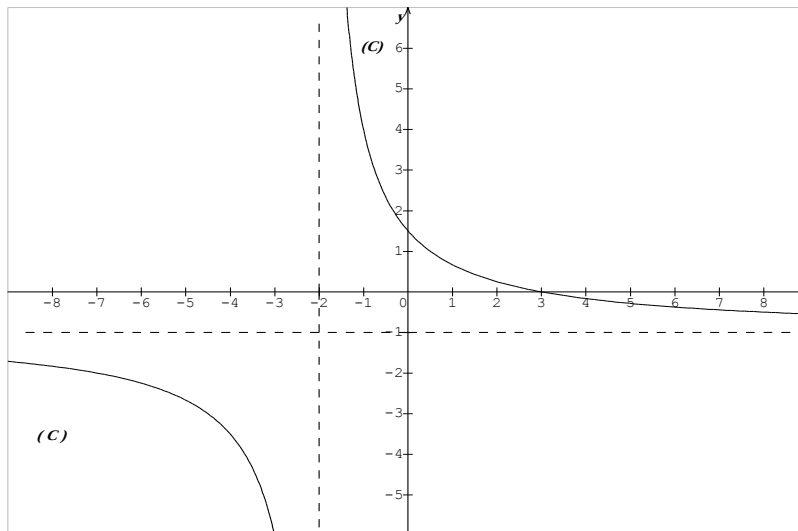
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (4) عين النهايات التالية:

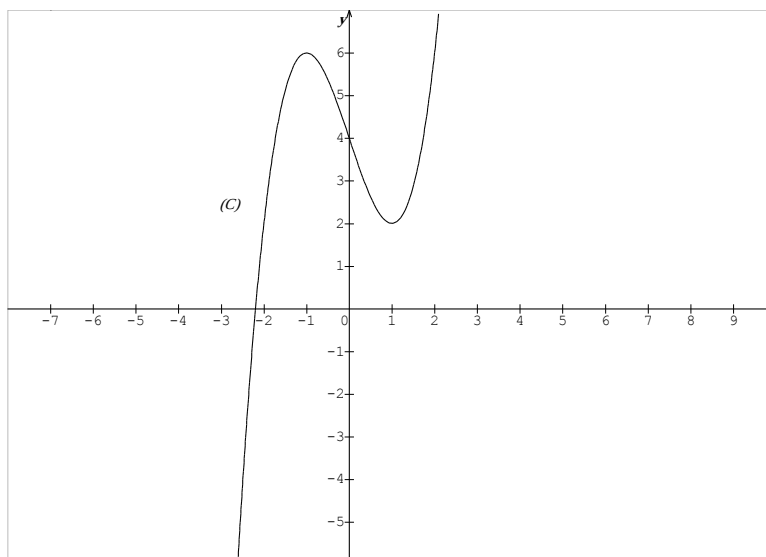
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (5) عين النهايات التالية:

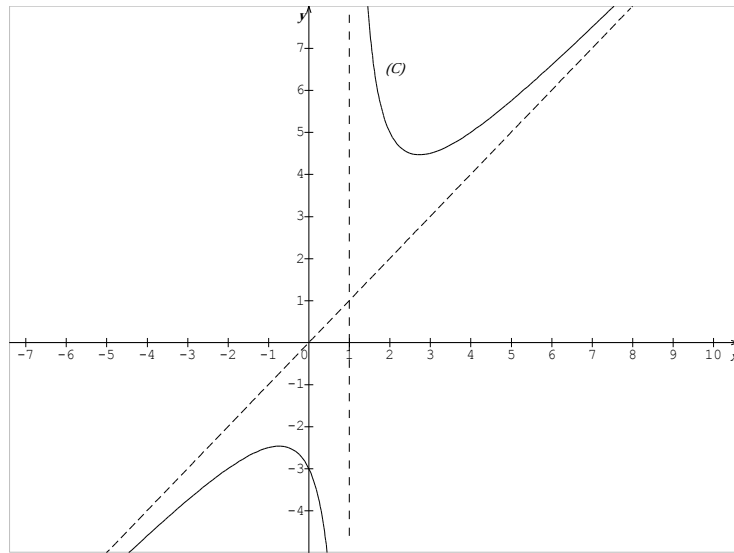
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$



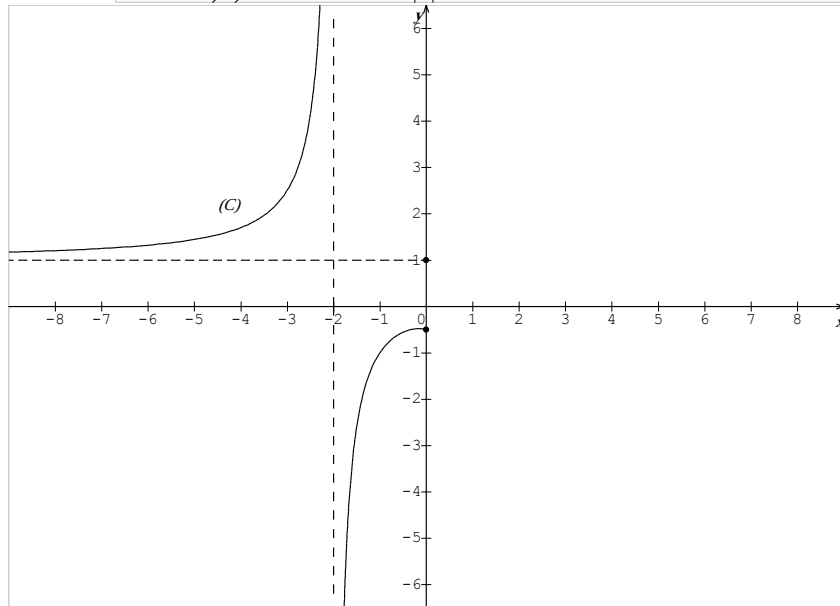
الشكل (1)



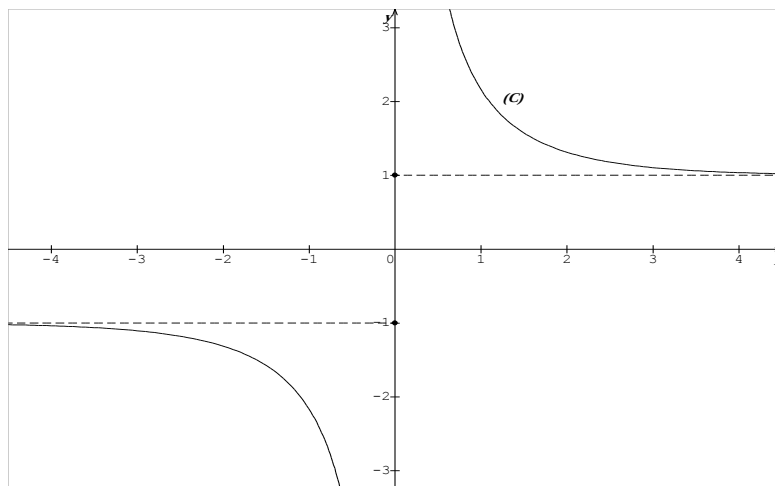
الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)



الشكل (5)

الجواب :

معتمدا على قراءة بيانية

بالنسبة للشكل (1) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1, \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$

بالنسبة للشكل (2) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

بالنسبة للشكل (3) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

بالنسبة للشكل (4) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

بالنسبة للشكل (5) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

التمرين 05 :

المستوي منسوب إلى معلم $(0, I, J)$ و (C) المنحني الممثل لدالة f

1 أثبت أن المستقيم (d) هو مقارب شاقولي للمنحني (C) في كل حالة من الحالات التالية:

الدالة f معرفة بالدستور:	معادلة للمستقيم (d) هي:
$f(x) = \frac{5x+3}{2x+1}$ (1)	$x = -\frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{3x^2+8x-2}{x^2-2x+1}$ (2)	$x = 1$
$f(x) = \frac{3x+5}{x^2-2}$ (3)	$x = -\sqrt{2}$

2 أثبت أن المستقيم (D) هو مقارب أفقي للمنحني (C) بجوار $+\infty$ وكذلك بجوار $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

الدالة f معرفة بالدستور:	معادلة للمستقيم (D) هي:
$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x^2+5x+5}$	$y = \frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$	$y = 0$
$f(x) = \frac{7x+8}{-3x+2}$	$y = -\frac{7}{3}$

3 أثبت أن المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$ وكذلك بجوار $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

الدالة f معرفة بالدستور	معادلة للمستقيم (Δ)
$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{x}$	$y = \frac{1}{2}x + 1$
$f(x) = -x + \frac{1}{x^2}$	$y = -x$
$f(x) = 5x + 1 - \frac{2}{x-5}$	$y = 5x + 1$

بالنسبة للحالة 1 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} f(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{و منه المستقيم (d) حيث معادلة له } x = -\frac{1}{2} \\ \text{هو مستقيم مقارب شاقولي للمنحني (C)} \end{array}$$

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين .

بالنسبة للحالة الثانية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \text{ و منه (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي (D) معادلة له } y = \frac{1}{2}$$

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين

بالنسبة للحالة الثالثة

$$f(x) = 5x + 1 - \frac{2}{x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-5) = +\infty \text{ و } f(x) - (5x+1) = -\frac{2}{x-5} \text{ لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x-5} = 0 \text{ منه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (5x+1)) = 0 \text{ و عليه (C) المنحني الممثل للدالة } f \text{ بالنسبة إلى معلم}$$

$$(0, I, J) \text{ يقبل مستقيم مقارب مائل } (\Delta) \text{ معادلة له: } y = 5x + 1 \text{ بجوار } +\infty \text{ و } -\infty$$

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين

التمرين 06 :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 11x + 13}{x-2} \text{ لتكن } f \text{ الدالة العددية للمتغير الحقيقي } x \text{ المعرفة بالدستور:}$$

1 عين المجموعة D مجموعة تعريف الدالة f ثم أثبت أنه من أجل كل عنصر x من D يكون:

$$f(x) = 3x - 5 + \frac{3}{x-2}$$

$$2 \text{ أحسب النهايات التالية: } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

3 أحسب f(x) بدلالة x (x ∈ D و f' الدالة المشتقة للدالة f) ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f

4 أنشيء جدول تغيرات الدالة f

نسمي (C) المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(0, I, J)$

أ- أثبت أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (Δ) يطلب تعيين معادلة لكل واحد منهما.

ب- أثبت أن نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) هي مركز تناظر للمنحني (C)

ت- أكتب معادلة للمستقيم (d) المماس للمنحني (C) في نقطته A ذات الفاصلة (-1)

ث- أنشيء بإتقان المستقيمتين: (D)، (Δ)، (d) والمنحني (C)

أنشيء المنحني (C') الممثل للدالة g المعرفة بالدستور: $g(x) = \frac{3x^2 - 11x + 13}{|x - 2|}$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 11x + 13}{x - 2} \quad \text{الجواب :}$$

1/ D هي مجموعة تعريف الدالة f

لنا x عدد حقيقي كفي و عليه: $(x \in D)$ يكافئ $(x - 2 \neq 0)$ ومنه: $D = \mathbb{R} - \{2\}$

لنثبت أن: $f(x) = 3x - 5 + \frac{3}{x - 2}$ من أجل x عنصرا من D

ليكن x عنصرا كفييا من D لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 5 + \frac{3}{x - 2} \\ &= \frac{(3x - 5)(x - 2) + 3}{x - 2} \\ &= \frac{3x^2 - 11x + 13}{x - 2} \end{aligned}$$

ومنه: $f(x) = 3x - 5 + \frac{3}{x - 2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 5 + \frac{3}{x - 2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - 5 + \frac{3}{x - 2} \\ &= -\infty \end{aligned} \quad /2$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} 3x - 5 + \frac{3}{x - 2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 3x - 5 + \frac{3}{x - 2} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{(6x - 11)(x - 2) - (3x^2 - 11x + 13)}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 12x + 9}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 12x + 9}{(x - 2)^2}$$

ليكن x عنصرا كفييا من D لدينا:

دراسة إتجاه تغير الدالة f

من أجل x عنصرا كفييا من D لنعين إشارة $f'(x)$

لما $(x \in D)$ لنا $(x-2 \neq 0)$ ومنه $(x-2)^2 > 0$

وعليه إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $3x^2 - 12x + 9$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
إشارة $3x^2 - 12x + 9$		+	-	-	+
إشارة $f'(x)$		+	-	-	+

لما $x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ لنا f دالة متزايدة تماما

لما $x \in]1, 3] - \{2\}$ لنا f دالة متناقصة تماما

4/ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$		-4	$+\infty$	7

5/ أ- اثبات أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين، (D) و (Δ)

يعني $\left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \right)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي (D) معادلة له: $x = 2$

يعني $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (3x - 5) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (3x - 5) = 0 \right)$ يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلة له: $y = 3x - 5$

ب- نقطة تقاطع (D) و (Δ) هي $B(2,1)$ وعليه:

$B(2,1)$ مركز تناظر لـ (C) يكافئ (من أجل كل x من D لنا $(4-x) \in D$ و $f(4-x) + f(x) = 2$)

$(x \in D)$ يكافئ $(x \neq 2)$ يكافئ $(-x \neq -2)$ يكافئ $(4-x \neq 4-2)$

يكافئ $(4-x \neq 2)$ يكافئ $((4-x) \in D)$

$$f(4-x) + f(x) = 3(4-x) - 5 + \frac{3}{4-x-2} + 3x - 5 + \frac{3}{x-2}$$

$$= 12 + \frac{3}{2-x} + \frac{3}{x-2} - 10$$

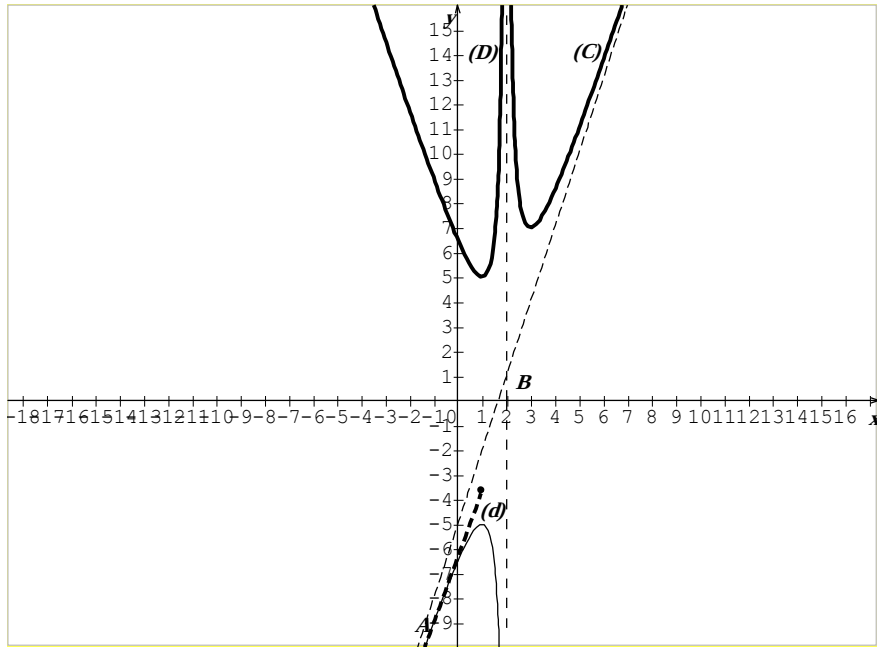
$$= 2$$

إذا: $f(4-x) + f(x) = 2$ ومنه: $B(2,1)$ مركز تناظر لـ (C)

ت- معادلة لـ (d) الماس لـ (C) عند النقطة A ذات الفاصلة -1 هي:

$$f(-1) = -9 \quad f'(-1) = \frac{8}{3} \quad \text{مع: } y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$y = \frac{8}{3}x - \frac{19}{3} \quad \text{أي: } y = \frac{8}{3}(x+1) - 9$$



عادات مفيدة لمذاكرة فعالة

يمكنك إعداد نفسك للنجاح في دراستك.
حاول أن تطبق وتقدر العادات التالية:

- **تحمل مسئولية نفسك.**
المسئولية هي معرفة أن نجاحك في الحياة يأتي عبر إدراكك لقراراتك بخصوص أولوياتك ووقتك وقدراتك.
- **ركز نفسك حول قيم ومبادئ معينة.**
لا تدع أصدقائك ومعارفك يحددون ما هو مهم بالنسبة لك.
- **ضع أولوياتك أولاً.**
اتبع أولوياتك التي وضعتها لنفسك، ولا تدع الآخرين أو عوامل أخرى تبعدك عن أهدافك.
- **أعتبر نفسك في حالة نجاح مستمر.**
نجاحك يأتي اجتهدك وعمل ما تستطيع في الفصل وخارجك لنفسك ولزملائك وحتى للمدرسين. إذا كنت مطمئناً لاجتهادك تصبح العلامات مؤشر خارجي فقط ولا تعبر بالضرورة عن رغبتك للدراسة.
- **أولاً تفهم الآخرين، ثم حاول أن يفهمك الآخرون.**
إذا كانت لديك مشكلة مع المدرس، بخصوص علامة غير مرضية أو واجب منزلي، ضع نفسك مكان المدرس. ثم اسأل نفسك ما هو أفضل أسلوب لمعالجة الموضوع.
- **ابحث عن أفضل الحلول لأي مشكلة.**
إذا كنت لا تستوعب مادة معينة، لا تعد قراءتها فقط بل جرب طرقاً أخرى. مثلاً استشر المدرس أو مستشارك الدراسي أو زميل لك أو مجموعة زملاء يذكرون سوية.
- **تحد نفسك وقدراتك باستمرار.**