مسألة 01 :

1) ادرس إشارة العبارة: $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ (لاحظ أن: $p(-2) = 0$)

2) نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x - 3}{x+1}$

* بين أنه من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ فإن : $f'(x) = \dfrac{2p(x)}{(x+1)^2}$

* ادرس تغيرات الدالة f.

* اكتب معادلة المماس للمنحني (C_f) الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ في النقطة ذات الفاصلة **0**.

* هل توجد مماسات للمنحني (C_f) توازي المستقيم الذي معادلته: $y = \dfrac{40}{9}x + 1$.

* احسب: $f(-3)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ؛ ثم أنشئ (C_f).

مسألة 02 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث: $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{1-x^2}$.

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) اكتب معادلة المماس للمنحني (C_f) الممثل لتغيرات الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة **2** .

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $-x^4 + x^2 + 1 = 0$. ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل .

4) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) .

5) احسب : $f(-2)$ ، $f(2)$.

6) أنشئ (C_f).

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلةّ : $x^4 - (1+m)x^2 + m - 1 = 0$

حل المسألة 01 :

1) دراسة إشارة p(x):

لدينا $p(-2) = 0$ وعليه: $p(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$. أي: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c$.

$p(x) = ax^3 + (b + 2a)x^2 + (c + 2b)x + 2c$.

ومنه: $\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 2 \\ c + 2b = 1 \\ 2c = 2 \end{cases}$ وعليه: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$ إذن: $p(x) = (x + 2)(x^2 + 1)$.

وبما أن : $x^2 + 1 > 0$

فإن : p(x) له نفس إشارة العدد $x+2$.

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
p(x)	$-$ 0 $+$

2) – إثبات أنه من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ فإن: $f'(x) = \dfrac{2p(x)}{(x+1)^2}$

لدينا : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة معرفة كما يلي:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x + 1)(x+1) - 1(x^3 + x^2 + x - 3)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 - x^3 - x^2 - x + 3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2} = \frac{2(x^3 + 2x^2 + x + 2)}{(x+1)^2} = \frac{2p(x)}{(x+1)^2}$$

ومنه : $f'(x) = \dfrac{2p(x)}{(x+1)^2}$

– دراسة التغيرات:

* مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty \,;\, -1[\cup]-1 \,;\, +\infty[$

* حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+x-3}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x+1} = +\infty$$

لأن : $\begin{cases} x^3+x^2+x-3 \to -4 \\ x+1 \overset{<}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x+1} = -\infty$$

لأن : $\begin{cases} x^3+x^2+x-3 \to -4 \\ x+1 \overset{>}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

* إشارة المشتق:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

هي من إشارة **p(*x*)**.

وعليه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty\ ;\ -2]$

ومتزايدة تماما على كل من المجالين $]-1\ ;\ +\infty[$ وَ $[-2\ ;\ -1[$

* جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا : $f(-2) = \dfrac{-8+4-2-3}{-2+1} = 9$

* معادلة المماس: لدينا : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

حيث: $f(0) = -3$ ، $f'(0) = 4$. إذن : $y = 4x + -3$.

* البحث عن المماسات:

لدينا معامل توجيه المماس هو $\dfrac{40}{9}$ وعليه : $f'(x) = \dfrac{40}{9}$

ومنه : $\dfrac{2p(x)}{(x+1)^2} = \dfrac{40}{9}$ ومنه : $\dfrac{p(x)}{(x+1)^2} = \dfrac{20}{9}$

وبالتالي : $\dfrac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)^2} = \dfrac{20}{9}$

ومنه : $9(x^3 + 2x^2 + x + 2) = 20(x+1)^2$ وعليه :

$9x^3 + 18x^2 + 9x + 18 = 20x^2 + 40x + 20$

أي : $9x^3 - 2x^2 - 31x - 2 = 0$

نلاحظ أن 2 حل لهذه المعادلة وعليه المعادلة تصبح : $(x-2)(ax^2 + bx + c) = 0$

$$ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = 0$$

$$ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c = 0$$

إذن : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -2 \\ c - 2b = -31 \\ -2c = -2 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} a = 9 \\ b = 16 \\ c = 1 \end{cases}$

ومنه المعادلة تكافئ : $(x-2)(9x^2 + 16x + 1) = 0$

وبالتالي إما : $x - 2 = 0$ أو $9x^2 + 16x + 1 = 0$

$x - 2 = 0$ معناه : $x = 2$.

حل المعادلة: $9x^2 + 16x + 1 = 0$

$\Delta = (16)^2 - 4(9) = 220$ وعليه للمعادلة حلان :

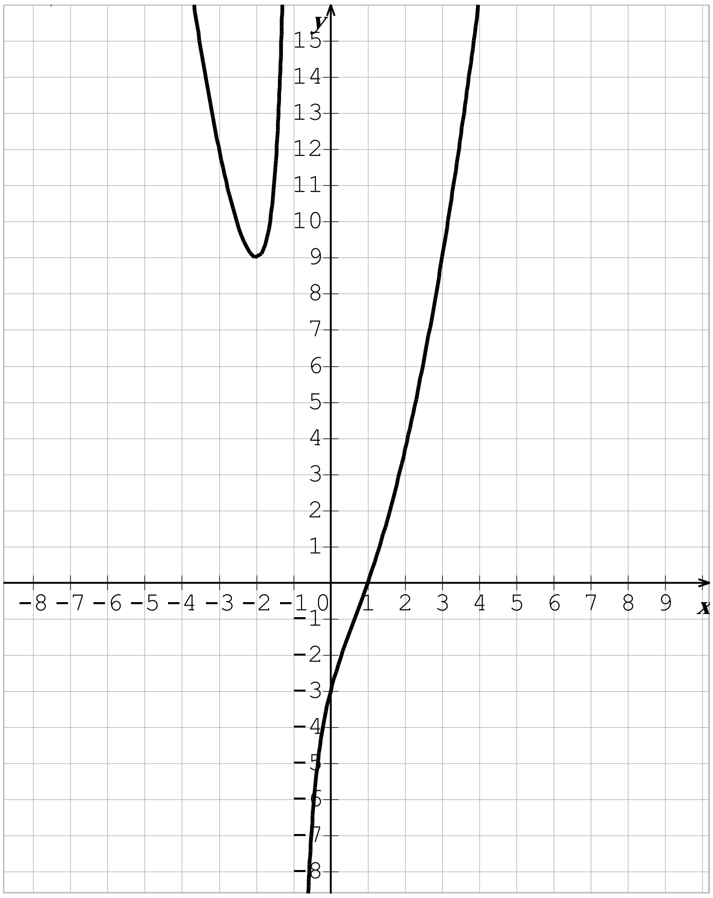
$$x_2 = \frac{-16+\sqrt{220}}{18} \qquad x_1 = \frac{-16-\sqrt{220}}{18}$$

ومنه: توجد ثلاث نقاط فواصلها **2**، x_1، x_2 يكون المماس عندها موازيا للمستقيم الذي معادلته : $y = \frac{40}{9}x + 1$.

* الحساب:

$f(-3) = 13,5$ ، $f(0) = -3$ ، $f(1) = 0$ ، $f(2) = \frac{11}{3}$.

المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مستقيم مقارب.



حل المسألة 02 :

1) دراسة التغيرات:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1 \ ; \ 1\}$$

$$D_f =]-\infty \ ; \ -1[\cup]-1 \ ; \ +1[\cup]1 \ ; \ +\infty[$$

* حساب النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + \frac{1}{1 - x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{1-x^2}=+\infty$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\ <}} x^2+\frac{1}{1-x^2}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} x^2+\frac{1}{1-x^2}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\ <}} x^2+\frac{1}{1-x^2}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\ >}} x^2+\frac{1}{1-x^2}=-\infty$$

* الاشتقاق: الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f حيث دالتها المشتقة معرفة كما يلي:

$$f'(x)=2x+\frac{2x}{(1-x^2)^2}=\frac{2x(1-x^2)^2+2x}{(1-x^2)^2}$$

ومنه: $$f'(x)=\frac{2x\left[(1-x^2)^2+1\right]}{(1-x^2)^2}$$

الدالة f' لها نفس إشارة $2x$ لأن $\left(1-x^2\right)^2+1>0$: وعليه:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين : $[0\ ;1[$ وَ $]1\ ;+\infty[$.

و متناقصة تماما على كل من المجالين : $]-1\ ;0]$ وَ $]-\infty\ ;-1[$.

* جدول التغيرات: $f(0)=1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) معادلة المماس:

لدينا : $f(2) = 4 + \frac{1}{-3} = \frac{11}{3}$ ؛ $f'(2) = \frac{4(9+1)}{9} = \frac{40}{9}$

معادلة المماس : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ و منه :

$y = \frac{40}{9}(x-2) + \frac{11}{3}$ أي : $y = \frac{40}{9}x - \frac{80}{9} + \frac{11}{3}$

وعليه : $y = \frac{40}{9}x - \frac{47}{9}$.

3) حل المعادلة: $-x^4 + x^2 + 1 = 0$ في $\mathbb{R}$:

بوضع : $x^2 = y$ نجد: $-y^2 + y + 1 = 0$

لدينا : $\Delta = 1 - 4(-1) = 5$ و منه للمعادلة حلين :

$y_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ $y_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

لما $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ومنه: $x_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; $x_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

لما $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$: $x^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ مرفوض لأن : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.

وعليه حلول المعادلة هي x_1 , x_2 .

* نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل: نضع $y = 0$.

إذن: $x^2 + \frac{1}{1-x^2} = 0$ وعليه: $\frac{(1-x^2)x^2+1}{1-x^2} = 0$

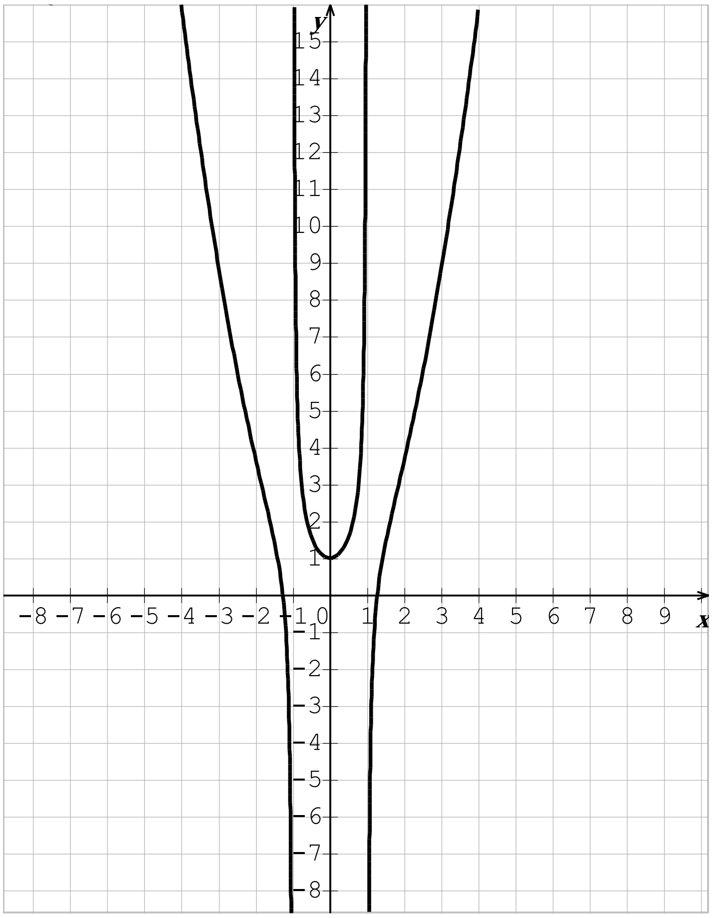
ومنه : $\begin{cases} -x^4 + x2 + 1 = 0 \\ 1 - x^2 \neq 0 \end{cases}$ وعليه : الحلول هي x_1 , x_2 كما في السؤال

السابق ($x_2 \approx -1,27$; $x_1 \approx 1,27$)

4) معادلات المستقيمات المقاربة هي: $x = 1$, $x = -1$.

5) الحساب: لدينا : $f(-2) = 4 + \frac{1}{-3} = \frac{11}{3}$ ؛ $f(2) = \frac{11}{3}$

6) إنشاء (C_f):



7) المناقشة البيانية:

لدينا : $x^4 - (1 + m)\, x^2 + m - 1 = 0$

وعليه: $x^4 - x^2 - m\, x^2 + m - 1 = 0$

أي : $(1 - x^2)m = -x^4 + x^2 + 1$

إذن: $m = \frac{-x^4 + x^2 + 1}{1 - x^2}$ أي: $m = \frac{x^2(1 - x^2) + 1}{1 - x^2}$

وعليه : $m = x^2 + \frac{1}{1 - x^2}$ إذن: $m = f(x)$ وعليه :

* لما $m \in]-\infty ; 1[$: للمعادلة حلان متمايزان .

* لما $m = 1$: للمعادلة حلان متمايزان وحل مضاعف .

* لما $m \in]1 ; +\infty[$: للمعادلة 4 حلول متمايزة .

الأستاذ : ع . زروقي