مسألة01 France 2010

الجزء الأول

نعتبر المعادلة التفاضلية $y'+y=e^{-x}$.....(1)

لتكن دالة معرفة كمايلي $u(x)=xe^{-x}$

بين أن الدالة $u(x)=xe^{-x}$ هي حلا للمعادلة (1)

عين مجموعة حلول المعادلة $y'+y=0$.....(2)

بين أن الدالة تكون v حلا للمعادلة (2) ادا وفقط ادا كانت $u-v$ حلا للمعادلة (1)

استنتج جميع حلول المعادلة (1)

عين الحلالوحيد f للمعادلة التفاضلية الدي يأخد قيمة 2من أجل 0

الحل

نعتبر دالة معرفة كمايلي $u(x)=xe^{-x}$ ومنه الدالة المشتقة هي $u'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$.

تكون u حلا للمعادلة (1) ادا تحقق $u'(x)+u(x)=e^{-x}$

ومنه بالتعويض فى المعادلة(1) نجد $u'(x)+u(x)=e^{-x}-xe^{-x}+xe^{-x}$ $u'(x)+u(x)=e^{-x}$ محققة .

ادن أن الدالة $u(x)=xe^{-x}$ هي حلا للمعادلة (1).

حلول المعادلة (2)

$y'+y=0$ يعني $y'=-y$ هي معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay$ حلها العام من الشكل $h_c(x)=ce^{ax}$

ومنه مجموعة حلوال المعادلة هي $h_c(x)=ce^{-x}$

بين أن الدالة تكون v حلا للمعادلة (2) ادا وفقط ادا كانت $u-v$ حلا للمعادلة (1)

الدالة $u-v$ حلا للمعادلة (1) ادا وفقط $(u-v)'+(u-v)=e^{-x}$

ومنه $u'-v'+u-v=e^{-x}$ ومنه $u'+u-v'-v=e^{-x}$

بمأن $u'(x)+u(x)=e^{-x}$ فان $e^{-x}-v'-v=e^{-x}$

ومنه $-v'-v=0$ و بتالى $v'+v=0$

ادا v هو حل للمعادلة التقاضلية (2)

مجموعة حلول المعادلة (1) هى الدالة $u-v$

نضع $f(x)=u(x)-v(x)$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2)هي $f(x)=xe^{-x}-ce^{-x}$

الحل الوحيد f للمعادلة التفاضلية الدي يأخد قيمة 2من أجل 0

لدينا $f(0)=1$ ومنه $0-ce^{0}=2$ ادن $c=-2$

ومنه الحل الخاص $f(x)=xe^{-x}+2e^{-x}$