التمرين الأول

نعتبر المعادلة التفاضلية $2y'+3y=x^2+1$ ....(1)

● بين أنه توجد دالة f كثير حدود من الدرجة الثانية هي حل للمعادلة (1)

● عين مجموعة حلول المعادلة $2y'+3y=0$ ....(2)

● بين أن الدالة $f-g$ تكون حلا للمعادلة (2) اذا وفقط اذا كانت g حلا للمعادلة (1)

● استنتج جميع حلول المعادلة (1)

● عين الحل الذي ينعدم من أجل 0

الحل

نعتبر f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية حيث $f(x)=ax^2+bx+c$ و منه $f'(x)=2ax+b$

تكون f حلا للمعادلة (1) اذا تحقق $2f'(x)+3f(x)=x^2+1$

ومنه $2(2ax+b)+3(ax^2+bx+c)=x^2+1$

$3ax^2+(4a+3b)x+2b+3c=x^2+1$

بالمطابقة $\begin{cases}3a=1\\4a+3b=0\\2b+3c=1\end{cases}$ اذا $\begin{cases}a=1/3\\b=-(4/3)a\\c=(1-2b)/3\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=1/3\\b=-4/9\\c=17/27\end{cases}$

اذن عبارت الدالة هي $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$

حلول المعادلة (2)

$2y'+3y=0$ يعني $y'=-\frac{3}{2}y$ هي معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay$ حلها العام من الشكل $h_c(x)=ce^{ax}$

ومنه مجموعة حلوال المعادلة هي $h_c(x)=ce^{-\frac{3}{2}x}$

نبين أن الدالة $f-g$ تكون حلا للمعادلة (2) اذا وفقط اذا كانت g حلا للمعادلة (1)

الدالة $f-g$ تكون حلا للمعادلة (2) اذا وفقط $2(g-f)'+3(g-f)=0$

ومنه $2g'-2f'+3g-3f=0$ ومنه $2g'-3g=2f'+3f$

بمأن $2f'(x)+3f(x)=x^2+1$ فان $2g'-3g=x^2+1$

اذا g هو حل للمعادلة التقاضلية (1)

مجموعة حلول المعادلة (1) هي الدالة g

وبمأن $f-g$ حلا للمعادلة (2) فان $g(x)-f(x)=h_c(x)$

اذا $g(x)=f(x)+h_c(x)$ ومنه $g(x)=ce^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$

الحل الدي ينعدم من أجل 0

لدينا $g(0)=1$ ومنه $ce^0+\frac{17}{27}=0$ ادن $c=-\frac{17}{27}$

ومنه الحل الخاص $g(x)=-\frac{17}{27}e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$