تمرين رقم 87 صفحة الكتاب المدرسي

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : D_f

$$f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها . استنتج المستقيمات المقاربة الموازية لمحور التراتيب.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة للمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

3) بين أنه من أجل كل x من D_f،

$$f(x)=x+1+\frac{x}{x^2-1}$$

4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

5) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;1[$ يطلب إيجاد، باستعمال حاسبة بيانية، حصر له سعته $0,1$.

6) أرسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).

7) من ملاحظة (C_f) خمن وجود مركز تناظر للمنحني (C_f) ثم أثبت صحة أو عدم صحة تخمينك.

الحل

الدالة f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : D_f

$$f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$

بمأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\left(x^3+x^2-1\right)=-1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\left(x^2-1\right)=0^+\end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty$

بمأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(x^3+x^2-1\right)=-1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(x^2-1\right)=0^-\end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$

ومنه فإن المستقيم ذو $x=-1$ المعادلة هو مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب .

بمأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(x^3+x^2-1\right)=1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(x^2-1\right)=0^-\end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$

بمأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(x^3+x^2-1\right)=1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(x^2-1\right)=0^-\end{cases}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$

ومنه فإن المستقيم ذو $x=1$ المعادلة هو مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب .

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال D_f و دالتها المشتقة f' هي

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^3+x^2-1\right)'-\left(x^2-1\right)'\left(x^3+x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-1\right)\left(3x^2+2x\right)-\left(2x\right)\left(x^3+x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(3x^4+2x^3-3x^2-2x\right)-\left(2x^4+2x^3-2x\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

إشارة المشتقة من إشارة البسط أي $\left(x^4-3x^2\right)$

ومنه $f'(x)=0$ يعنى أن $x^4-3x^2=0$

أي $x^2\left(x^2-3\right)=0$

وبتالى $\begin{cases}x^2=0\\x^2-3=0\end{cases}$

إذن $\begin{cases}x=0\\x^2=3\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=0\\x=-\sqrt{3};x=\sqrt{3}\end{cases}$

جدول الإشارة المشتقة

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$-\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2	$+$		$+$		$+$		0		$+$		$+$		$+$
x^2-3	$+$		0		$-$		$-$		$-$		0		$+$
$f'(x)=0$	$+$		0		$-$		0		$-$		0		$+$

جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$-\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)=0$	$+$		0		$-$		0		$-$		0		$+$
$f'(x)=0$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2-3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2+3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

أكتب معادلة للمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

و بمأن $f'(0)=0$ و $f'(0)=0$

ومنه معادلة المماس هي $y = 0(x-0)+1$.

أي $y = 1$

3) بين أنه من أجل كل x من D_f،

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2-1}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-1) + x}{x^2 - 1}$$

لدينا

$$f(x) = \frac{x^3 - x + x^2 - 1 + x}{x^2 - 1} = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) يكافىء

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}-(x+1)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]$$

وبمأن

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$$

ومن جهة أخرى

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}-(x+1)\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]$$

وبمأن

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائلا للمنحني (C_f).

أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

$$f(x)-y=f(x)-(x+1)$$

$$f(x)-y=\frac{x}{x^2-1}$$

إشارة الفرق من إشارة الجداء

جدول الإشارة

x	$-\infty$		-1		0		1	$+\infty$
x	$-$		$-$		$+$		$+$	
x^2-1	$+$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)-y$	$-$		$+$		$-$		$+$	

تكون $f(x)-y<0$ إذا كان $x\in]-\infty;-1[\cup]0;1[$ والمنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

تكون $f(x)-y>0$ إذا كان $x\in]-1;0[\cup]1,+\infty[$ والمنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

تكون $f(x)-y=0$ إذا كان $x=0$ والمنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ذات افحداثيات $\omega(0,1)$

ملاحظة

للإيجاد ترتيب نقطة التقاطع (C_f) و (Δ) نعوض في الدالة أو في المستقيم (Δ) الذي ندرس الوضعية معه.

) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;1[$ يطلب إيجاد، باستعمال حاسبة بيانية، حصر له سعته $0,1$.

بمأن الدالة مستمرة و رتيبة على المجال $]-1;1[$ و تأخذ قيمها في $]-\infty;+\infty[$ و العدد 0 ينتمي إلى المجال $]-\infty;+\infty[$ ومن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α على المجال $]-1;1[$ يحقق $f(\alpha)=0$

حصر للعدد α سعته $0,1$. نستعين بالجدول التالي

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	$_1$1	1	0.99	0.97	0.92	0.83	0.66	0.33	−0.42

ومنه نستنتج أن الحصر المطلوب هو $0,7<\alpha<0,8$

7) من ملاحظة (C_f) خمن وجود مركز تناظر للمنحني (C_f) ثم أثبت صحة أو عدم صحة تخمينك. x

من ملاحظة (C_f) نخمن وجود مركز تناظر للمنحني (C_f) و هوالنقطة $\omega(0;1)$

نتحقق من التخمين بالحساب

نعلم أن تكون النقطة $\omega(a;b)$ مركز تناظر لإذا تحقق

من أجل $x \in D_f$ و $2a-x \in D_f$ فإن $f(2a-x)+f(x)=2b$

تكون النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر إذا تحقق

من أجل $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ فإن $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times 1$ أي $f(-x)+f(x)=2$

ومنه

$$f(-x)+f(x)=\frac{(-x)^3+(-x)^2-1}{(-x)^2-1}+\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{-x^3+x^2-1}{x^2-1}+\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{-x^3+x^2-1+x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

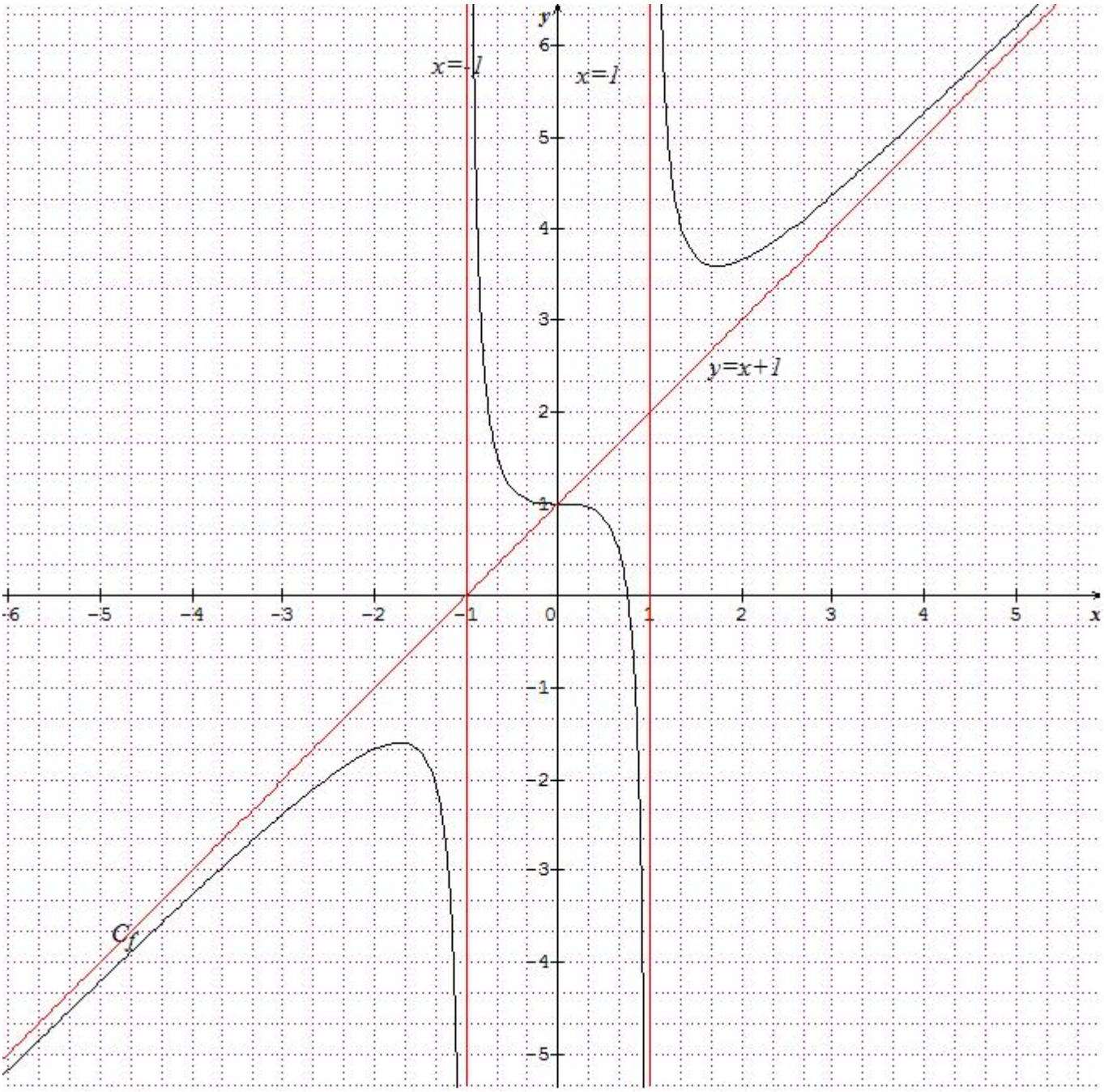
لدينا

$$f(-x)+f(x)=\frac{2x^2-2}{x^2-1}=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x^2-1}$$

$$f(-x)+f(x)=2$$

ومنه النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى .

أرسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).



إنتهى بحمد الله
والله الموفق