

سلسلة استعداد للباكوريا رقم (03)

السنة الدراسية: 2009/2008

المستوى : ثلاثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

عداد الأستاذ
حليلات عمارة

{ المحاور : الدوال الأسية والمعادلات التفاضلية }

الدالة الأسية النيبيرية

التمرين (01) حل في R المعادلات التالية:

$$\square = R$$

$$e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}} (3) \quad , \quad e^{-5x} = \frac{1}{e} (2) \quad , \quad e^{2x} = 1 (1)$$

$$e^x + 3e^{-x} - 4 = 0 / 6 \quad , \quad e^x + 2e^{-x} - 3 = 0 / 5 \quad , \quad e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 (4)$$

$$e^{3x} + 3e^{2x} - e^x - 3 = 0 \quad , \quad 6e^{-3x} + e^{-x} - 13e^{-2x} + 2 = 0 (7)$$

التمرين (02) حل في i المتراجحات التالية:

$$e^{x^2} > (e^3)^4 e^{-x} (4) \quad , \quad e^{x+1} > e^{-\frac{2}{x}} (3) \quad , \quad e^{2x^2} \leq e^{5x+3} (2) \quad , \quad e^{3x} \leq 1 (1)$$

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 \geq 0 (6) \quad , \quad (e^x + 3)(2 - e^x) \geq 0 (5)$$

التمرين (03) عيّن مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية :

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1} / 3 \quad , \quad f(x) = e^x (x^2 + x - 3) / 2 \quad , \quad f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} / 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} e^{\frac{1}{x}} / 6 \quad , \quad f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x} / 5 \quad , \quad f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} / 4$$

التمرين (04) تحقق من صحة المساواة المعطاة من اجل كل x في كل حالة من الحالات التالية:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} / 2 \quad , \quad \frac{e^x}{2 + e^x} = \frac{1}{2e^{-x} + 1} / 1$$

$$\frac{e^x}{e^x - x} = \frac{1}{1 - xe^{-x}} / 4 \quad , \quad (e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}} + 2 / 3$$

عداد الأستاذ
حليلات عمارة

التمرين (05) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1. بين أن الدالة f فردية.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}$

التمرين (06) احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x \quad (4) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \quad (3) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x + 1) \quad (2) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \quad (8) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^{-x} \quad (7) , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \quad (6) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{x-1} \quad (11) , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)e^{-x+1} \quad (10) , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^{-x+1} \quad (9)$$

التمرين (07) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

وليكن C_f منحنىها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f واثبت أن المنحني C_f يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة.

2/ بين أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f وارسم المنحني C_f .

3/ لتكن الدالة h المعرفة بـ: $h(x) = \frac{2e^x}{|e^x - 1|}$ (g') تمثيلها البياني

أ) اكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب) باستخدام المنحني C_f ، ارسم المنحني (g') .

جـ) ناقش بيانها تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول

$$\text{الحقيقي } x : (m-3)|e^x - 1| = 2e^x$$

التمرين (08) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f الممثل للدالة f

2) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين .

3) اثبت أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيينها

4) ارسم المنحني C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$

التمرين (09) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 e^{-x}$

(1) ادرس تغيرات الدالة f

(2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني C_f الممثل للدالة f

(3) ارسم المنحني C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$

(4) استنتج رسم المنحني (Γ) الممثل للدالة h حيث : $h(x) = x^2 e^{-|x|}$

التمرين (10) نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = e^{-x} + \frac{1-x}{1+x}$

(1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f الممثل للدالة f

(2) ارسم المنحني C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$

التمرين (11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ :

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

ولیکن C_f منحنيا البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$.

(1) احسب النهايتين عند $-\infty$ و $+\infty$

(2) احسب $f(-x) + f(x)$ من اجل كل قيم x من $\mathbb{R}$ وماذا تستنتج بالنسبة للنقطة

$$A(0; 1 + \ln 4)$$

(3) ادرس تغيرات الدالة f

(4) تحقق انه من اجل كل قيم x من $\mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا.

(5) بيّن انه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$

(6) بيّن أن المنحني C_f يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب تعيينهما ثم ارسم المنحني C_f .

التمرين (12) نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

ولیکن C_f منحنيا البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$.

(1) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم

$$f(x) = a + \frac{be^{2x}}{e^{2x} - 1}$$

(2) ادرس تغيرات الدالة f

(3) بيّن أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر للمنحني C_f ثم ارسم المنحني C_f

(4) بيّن ان المنحني C_f يقبل مماسين ميل كل منهما -6 عند نقطتين من C_f يطلب تعيين

هاتين النقطتين.

التمرين (13) ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية و الفروع اللانهائية للمنحني الممثل لها ثم

ارسم تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$.

$$f(x) = (x+1)e^x \quad /3 \quad f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1} \quad /2 \quad f(x) = \frac{e^x}{x-1} \quad /1$$

$$f(x) = (1+x)e^{-x} \quad /6 \quad f(x) = 2e^{2x} - 4e^x \quad /5 \quad f(x) = 3-x - \frac{1}{e^x - 2} \quad /4$$

$$f(x) = (2x^2 - 3x)e^{-x+1} \quad /9 \quad f(x) = 4xe^{-2x} \quad /8 \quad f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x \quad /7$$

$$f(x) = (1-x)e^{1-x} \quad /12 \quad f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \quad /11 \quad f(x) = \frac{e^{2x} - e^x + 4}{e^x - 1} \quad /10$$

التمرين (14) لتكن الدالة f المعرفة على i بـ: $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; i, j)$

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) بين أن النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C).

(3) عين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة A .

(4) لتكن الدالة g المعرفة على i كما يلي: $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$

(أ) بين أنه من أجل كل $x \in i$: $g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1+e^x)^2}$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة g . (ج) استنتج إشارة g على i .

(د) استنتج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم T

(5) ارسم T و (C).

التمرين (15) f دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; i, j)$

(1) بين أن المستقيم (D): $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C)

(2) ادرس قابلية اشتقاق f عند 0

(3) ادرس تغيرات f

(4) ارسم المنحني (C)

التمرين (16) 1/ بَيِّن أن الدالة : $e^x \rightarrow x$ هي مجموع دالة زوجية و دالة فردية

2/ نضع : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (دالة تجب الزائدية) ، (المنحني الممثل لها

$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (دالة الجيب الزائدية) ، (المنحني الممثل لها

أ- ادرس شفعية ch و sh

ب- ادرس تغيرات كلا من ch و sh .

ج- ارسم في نفس المعلم المنحنيين (C) و (C')

3/ بَيِّن أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b يكون :

$$ch(a+b) = ch(a).ch(b) + sh(a).sh(b) \quad ch^2(a) - sh^2(a) = 1$$

$$sh(a+b) = sh(a).ch(a) + sh(b).ch(b)$$

4/ استنتج : $ch(2a)$ و $sh(2a)$

التمرين (17) نعتبر الدالة f المعرفة على i كما يلي : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

حيث : a, b, c أعداد حقيقية . (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$

1/ أحسب الدالة المشتقة للدالة f بدلالة a, b, c

2/ عين الأعداد الحقيقية a, b, c إذا علمت أن (C_f) يشمل النقطة $A(0, 1)$ ويقبل

مماسا يوازي محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1 و $f'(0) = -6$

3/ فيما يلي نعتبر f الدالة المعرفة على i بالعلاقة : $f(x) = (x^2 - 5x + 1)e^{-x}$

أ) احسب $f(0)$

ب) ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

ج) ارسم المنحني (C_f)

التمرين (18) : لتكن الدالة f المعرفة على i بـ : $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$

حيث a, b, c أعداد حقيقية . (C) هو التمثيل البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$

1) عين a, b, c بحيث المنحني (C) يشمل النقطة O و الدالة المشتقة f' تتعدم من أجل $x = \ln \frac{3}{4}$

و المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) .

2) نعتبر الدالة f المعرفة على i بـ : $f(x) = 2e^{2x} - 3e^x + 1$

أ) ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.

ب) حدد نقط تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل.

ج) عين معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

د) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) . هـ) ارسم (C) .

المعادلات التفاضلية

التمرين (19): عيّن الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

(أ) $y' = 2y$ ، (ب) $2y' - y = 0$ ، (ج) $y' + 3y = 2$ ، (د) $3y' - 2y + 1 = 0$

التمرين (20): عيّن الحل f للمعادلات التفاضلية المقترحة والمرفقة بشرط ابتدائي :

(أ) $2y' + y = 0$ و $f(\ln 4) = 1$ ، (ب) $y' - 3y = 0$ و $f(0) = 1$

(ج) $2y' + y = 1$ و $f(-1) = 2$

في الحالة الأخيرة (ج) . ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم في معلم متعامد ومتجانس تمثيلها البياني .

التمرين (21): نعتبر الدالة m المعرفة على $[0; +\infty[$ التي ترفق بالعدد t ، العدد $m(t)$ حيث

$m(t)$ هي كتلة الملح بالغرام المحتواة في محلول ملحي (ماء + ملح) عند اللحظة t بالدقائق نقبل

أن الدالة m هي حل للمعادلة التفاضلية : $5y' + y = 0$: (E) و أن الشرط الابتدائي

هو : $m(0) = 300$

1. حل المعادلة (E)

2. عيّن العدد t_0 بحيث يكون : $m(t_0) = 150$

3. نقبل انه لا يمكن الكشف عن وجود الملح خلال اللحظة t إلا إذا كان $m(t) \leq 10^{-2}$

- ابتداء من أية لحظة يكون ممكنا الكشف عن وجود الملح ؟

التمرين (22): نعتبر المعادلة التفاضلية (1) : $y' - 2y = 2x + 1$

1. أوجد دالة f تآلفية تكون حلا للمعادلة التفاضلية (1).

2. بوضع : $y = z + f$ ، بيّن أنه إذا كان y حل للمعادلة التفاضلية (1) فإن z حل للمعادلة

التفاضلية : (2) $z' - 2z = 0$...

3. حل عندئذ المعادلة التفاضلية (2) ثم أستنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (1)

التمرين (23): نعتبر المعادلة التفاضلية (1) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$

1. بوضع : $y = z - 3e^{-3x}$ ، أوجد المعادلة التفاضلية (2) التي تحققها الدالة z

2. حل المعادلة التفاضلية (2) ثم أستنتج حل المعادلة التفاضلية (1)

3. عيّن الحل f للمعادلة (1) بحيث : $f(0) = \frac{3}{2}$

4. تحقق أن الدالة f تكتب على الشكل : $f(x) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right)$

5. ادرس تغيرات الدالة f

6. عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.

7. احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحني (C_f)

{ التدريب على حل مسائل (دراسة دوال) - الجزء الثالث }

مسألة (01) I) نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كما يأتي

$$f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1 \quad \text{حيث : } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان}$$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1 cm .
عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجييه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1 \quad (C_g) \quad \text{تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق}$$

(أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ و فسّر هذه النتيجة بيانياً . (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$)

(ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

(ج) بين أن المنحني (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثيها .

(د) اكتب معادلة المماس للمنحني (C_g) عند النقطة I . (هـ) ارسم (C_g) .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كما يأتي : $k(x) = g(x^2)$
- باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

مسألة (02) I) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ ،

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- (أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف w و أكتب معادلة لمماس (C_f) عند النقطة w

(ب) أثبت أن w مركز تناظر للمنحني (C_f) .

3- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)]$.

(ب) استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما

4- (أ) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,76; -2,77[$

(ب) احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم (C_f) ومستقيمي المقاربين .

II) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$: $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ ، (C_g) منحنى الدالة g

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) = f(-x)$

- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) إلى (C_g)

2- أنشئ في نفس المعلم السابق (C_g) (دون دراسة g)

مسألة (03) I - g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$g(x) = -1 - xe^x$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g . (2) استنتج إشارة $g(x)$

II - f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = -x + (1-x)e^x$

وليكن (g) منحنىها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(3) ادرس تغيرات الدالة f و طبيعة الفروع اللانهائية للمنحني (g)

(4) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (g) عند النقطة التي فاصلتها 0

(5) اثبت أن للمنحني (g) نقطة انعطاف يطلب إيجاد إحداثياتها.

(6) بيّن انه يوجد عدد حقيقي x_0 ينتمي إلى المجال $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$ حيث : $f(x_0) = 0$

(7) ارسم (Δ) و (g) .

مسألة (04) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^x$$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) ادرس تغيرات الدالة f

(2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) وبيّن انه يقبل مستقيماً مقارباً (Δ) يطلب إعطاء معادلته.

(3) ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C) و (Δ) .

(4) أ- x_0 عدد حقيقي ، نعتبر (T) المماس للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة x_0 .

عيّن x_0 حتى يكون (T) موازياً لـ (Δ) ، اكتب عندئذ معادلة لـ (T) .

ب- بيّن ان المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

ج- ارسم (T) و (C) في نفس المعلم .

(5) ناقش بياناً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم الذي

معادلته (T_m) الذي معادلته : $y = -x + m$

مسألة (05) ليكن $C(t)$ التركيز بـ (mg/l) لدواء في الدم بدلالة الزمن $(t \in \mathbb{R}_0)$ حيث t

معبراً عنه بالساعات . سرعة تخلص الجسم من هذا الدواء متناسبة مع كمية الدواء الباقية في الدم في تلك اللحظة ، ثابت التخلص يساوي 0.25 ، التركيز الابتدائي هو $5mg/l$.

(1) برر المساواة : $C'(t) = -0.25C(t)$ ثم اوجد عبارة $C(t)$

(2) ادرس تغيرات C ثم ارسم بيان الدالة C

(3) أعط حصراً بتقريب 0.01 للحظة t_0 التي ابتداء منها يكون $C(t) \leq 2$

مسألة (06) I دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = x + 1 + e^x$

1. ادرس تغيرات الدالة g .
2. اثبت أن المنحني الممثل لها (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب إعطاء معادلته.
3. بيّن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا a في المجال $[-1.3; -1.2]$
4. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
5. أنشئ في معلم متعامد التمثيل البياني للدالة g .

II لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

(g) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; i, j)$

1. بيّن أن: $f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ثم استنتج تغيرات f
 2. بيّن أن: $f(a) = a + 1$ ثم استنتج حصر الـ $f(a)$:
 3. عيّن معادلة المماس (D) للمنحني (g) عند النقطة ذات الفاصلة 0. ثم ادرس وضعية المنحني (g) بالنسبة للمستقيم (D) .
 4. بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$ مقارب مائل للمنحني (g) في جوار $+\infty$
 5. ادرس وضعية المنحني (g) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- ارسم (Δ) و (D) و (g)

مسألة (07) I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} + x - 1$

1. ادرس تغيرات الدالة g .
 2. احسب $g(0)$ ثم استنتج أن: $e^{-x} + x \geq 1$ لكل $x \in \mathbb{R}$
- ## II لتكن الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$
- (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; i, j)$
1. عيّن مجموعة تعريف الدالة f
 1. بيّن أن: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$ لكل $x \in \mathbb{R}^*$
 2. بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم فسّر هندسيا النتيجة.
 3. ادرس تغيرات الدالة f
 4. أ) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة O .
ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المماس (Δ) .
جـ) أنشئ (Δ) و (C_f) .

مسألة (08) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

و (C) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$.

(1) أ - تحقق من أن : $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ لكل x من i

ب - استنتج أن f فردية

(2) احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) أ - بين أن : $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ لكل x من i

ب - أعط جدول تغيرات الدالة f على i^+

ج - استنتج ان : $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$ لكل x من i .

(4) بين ان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x \right) \right] = 0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

(5) أنشئ في المعلم $(O; i, j)$ المستقيم الذي معادلته : $y = 1 - \frac{1}{2}x$ ثم أنشئ المنحني (C)

مسألة (09) I لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$g(x) = 1 - xe^{1-x}$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) استنتج إشارة $g(x)$

II f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = x + (x+1)e^{1-x}$

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$.

(1) احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) ادرس تغيرات الدالة f

(3) أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{1-x} = 0$

ب) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_f)

(4) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (Δ) معامل توجيهه 1. اكتب معادلة هذا المماس.

(5) اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left] -1; \frac{-1}{2} \right[$.

(6) ارسم المماس (Δ) و المنحني (C_f) .

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(x+1)e^{1-x} = m$

مسألة (10) الجزء الأول : تحديد حل المعادلة التفاضلية : (1)..... $g' - 2g = xe^x$

1- حل المعادلة التفاضلية :

$$(2)..... y' - 2y = 0 \text{ حيث } y \text{ دالة قابلة للاشتقاق على } i$$

2- ليكن a و b عددين حقيقيين و m الدالة المعرفة على i :

$$m(x) = (ax + b)e^x$$

أ) حدد a و b حتى يكون m حلا للمعادلة (1)

ب) برهن أن الدالة n تكون حلا للمعادلة (2) إذا وفقط إذا كان $m + n$ حلا للمعادلة (1)

ج) استنتج مجموعة حلول المعادلة (1).

د) حدد الحل للمعادلة (1) والذي ينعدم عند القيمة 0.

الجزء الثاني : دراسة دالة مساعدة:

لتكن g الدالة المعرفة على i كما يلي : $g(x) = 2e^x - x - 2$

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) حدد عدد حلول المعادلة : $g(x) = 0$. نسمي a الحل غير المعدوم تحقق أن :

$$-1.6 \leq a \leq -1.5$$

(3) حدد إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x

الجزء الثالث : دراسة الدالة $f : f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

(1) حدد نهاية f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

(2) ادرس تغيرات الدالة f

(3) بين أن : $f(a) = \frac{a^2 + 2a}{4}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(a)$

(4) ارسم المنحني البياني (g) للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$ (خذ الوحدة : $2cm$)

مسألة (11) الجزء الأول : لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (20x + 10)e^{\frac{1}{2}x}$$

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$

(1) ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(2) ادرس تغيرات f وشكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 10$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $[0; +\infty[$. أعط قيمة

مقربة إلى 10^{-3} للعدد a .

(5) ارسم المنحني (C_f).

الجزء الثاني : نضع $y(t)$ قيمة درجة حرارة تفاعل كيميائي ، مقدرة بالدرجات سيلسيوس ، عند اللحظة t ، مقدرة بالساعات. القيمة الابتدائية عند اللحظة $t = 0$ هي $y(0) = 10$.

نقبل بأن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي t من المجال $[0; +\infty[$ العدد $y(t)$ هي حل للمعادلة

$$y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t} \text{(1)}$$

(1) تحقق من ان الدالة f المدروسة في الجزء الأول حل للمعادلة التفاضلية (1) على المجال $[0; +\infty[$

(2) نقترح فيما يلي : البرهان أن الدالة f هي الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية (1) على المجال $[0; +\infty[$ التي تأخذ القيمة 10 عند اللحظة 0.

(أ) ليكن g حلا كفيًا للمعادلة التفاضلية (1) على المجال $[0; +\infty[$ بحيث : $g(0) = 10$.

$$\text{بين أن الدالة } g - f \text{ حل للمعادلة التفاضلية : (2) } y' + \frac{1}{2}y = 0$$

(ب) حل المعادلة التفاضلية (2).

(جـ) ماذا تستنتج ؟

(3) ما هو الوقت اللازم حتى تنزل درجة الحرارة إلى قيمتها الابتدائية ؟ تدور النتيجة إلى الدقيقة.

مسألة (12) الجزء الأول: نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f(x) = e^x - 3x - 1$

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين : $M(a; 0)$ و $O(0; 0)$ حيث : $a \in \left] \frac{5}{4}; 2 \right[$

3- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) وحدد وضعيته بالنسبة للمنحني (C_f).

4- بين أن (C_f) لا يقبل مقارب مائل بجوار $+\infty$ ، حدد طبيعة هذا الفرع اللانهائي ، ارسم (C_f)

الجزء الثاني : نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $g(x) = e^x - \frac{3}{2}x^2 - x + 1$

(C_g) هو المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- تأكد من أنه لكل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$

2- استنتج تغيرات الدالة g

3- باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة . برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال

$\left] -1; -\frac{3}{2} \right]$. 4- ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_g)

4- بين ان المنحني (C_g) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثيها. ارسم (C_g)

مسألة (13) الجزء الأول : لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$$

ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس تغيرات الدالة f و اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)
- 2- عيّن إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع المحورين الإحداثيين .
- 3- ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي وحدد نقطة تقاطعهما A .
- 4- اكتب معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة A
- 5- ارسم المماس والمنحني (C_f)

الجزء الثاني : نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$

(C_g) هو المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1- عيّن مجموعة تعريف الدالة g
- 2- بيّن أن : $g'(x) = e^x \cdot f'(e^x)$
- 3- استنتج تغيرات الدالة g .
- 4- بيّن أن النقطة $w \left(0; -\frac{3}{2} \right)$ مركز تناظر للمنحني (C_g) .
- 5- ارسم المنحني (C_g)

6- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(1-m)e^{2x} - 4e^x + 4 + m = 0$

مسألة (14) (I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = x + \frac{e^x}{e^x + 1}$

ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- 2/ برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D_1) في جوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .
- 3/ أثبت أن المستقيم (D_2) الذي معادلته : $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) في جوار $+\infty$
- 4/ برهن أن المنحني (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان (D_1) و (D_2)
- 5/ برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a بحيث : $-1 < a < 0$
- 6/ لتكن النقطة w تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الترتيب ، برهن أن النقطة w مركز تناظر للمنحني (C_f)

7/ بين أنه توجد نقطة من (C_f) يكون عندها ميل المماس يساوي $\frac{5}{4}$

8/ أنشئ المستقيمين (D_1) و (D_2) و المنحني (C_f)

II-1/ انطلاقا من المنحني (C_f) أشرح كيف نحصل على المنحنيين (C_g) و (C_h) حيث :

$$h(x) = f(x) + 1 \quad \text{و} \quad g(x) = f(|x|)$$

2/ ارسم عندئذ المنحنيين (C_h) و (C_g) .

مسألة (15)) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$$

ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$.

1- احسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2- بين ان المستقيم (D) الذي معادلته : $y = 2x - 2$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

3- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) و المستقيم (D) .

4- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = xe^{-x} + 2(1-e^{-x})$$

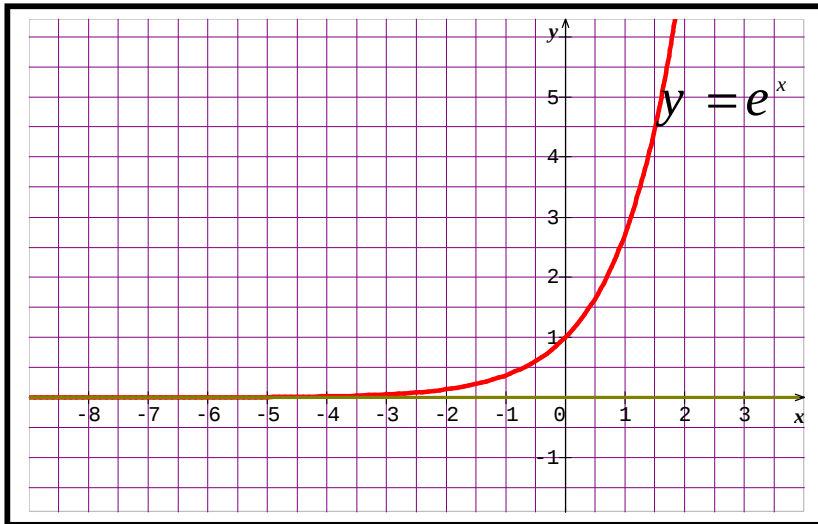
ب) أثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x و $x \neq 0$ أنه $f'(x) \neq 0$

5- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 وفسر النتيجة بيانيا .

6- شكل جدول تغيرات الدالة f .

7- ارسم المستقيم (D) و المنحني (C_f)

8- عيّن النقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (D) .



الهدية

يقول الشاعر أبو القاسم الشابي :

لبست المنى وخلعت الحذر

إذا ما طمحت إلى غاية

ولا كبة اللهب المستعر

ولم أتخوف و عور الشباب

يعش أبد الدهر بين الحفر

ومن لا يحب صعود الجبال

يقول الإمام الشافعي رحمه الله :

سأتيك عنها مخبر إبيان

أخي لن تنال العلم إلا بسنة

وصحبة أستاذ وطول زمان

ذكاء وحرص وإصطبار وبلغة