الأستاذ:محمد سراي

# تمارين

# الدالة الأسية النيبرية

# و

# دالة اللوغاريتم النيبري

الأستاذ:محمد سراي

## التمرين الأول:

الجزء الأول:

$g$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 4e^x - 2xe^x - 4$$

1. احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x); \lim_{x\to+\infty} g(x)$
2. احسب $g'(x)$ و عيّن إشارتها.
3. شكّل جدول تغيرات الدالة $g$.
4. بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين فقط هما 0 و $\alpha$ حيث $\alpha$ من المجال $]1.59; 1.60[$
5. عيّن حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x-2x}$، $(\zeta)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، وحدة الطول $2\ cm$.

1. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = \dfrac{2-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{e^x}{x}-2}$
2. استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. فسّر النتيجة هندسيا.
3. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:
$$f(x) = \frac{e^x-2}{e^x-2x} - 1$$
4. استنتج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. فسّر النتيجة هندسيا.
5. احسب $f'(x)$ و تأكد أن: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$
6. شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.
7. بيّن أن: $f(\alpha) = \dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
8. أنشئ بدقة المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\zeta)$ و المنحنى $(\zeta)$ .

من أجل كل عدد حقيقي $x$ :

$e^x > 0 \qquad /1$

$(e^x)' = e^x \qquad /2$

$(e^{g(x)})' = g'(x)e^{g(x)}$

$a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z}$

$e^{a+b} = e^a.e^b$

$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$(e^a)^n = e^{na}$

## التمرين الثاني:

**الجزء الأول:**

$g$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ:

$$g(x)=2x^3-1+2\ln x$$

1. احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x); \lim_{x\to+\infty} g(x)$
2. احسب $g'(x)$ و عيّن إشارتها.
3. شكّل جدول تغيرات الدالة $g$.
4. برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $\left[\frac{1}{2},1\right]$ يحقق $g(\alpha)=0$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

**الجزء الثاني:**

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-\frac{\ln x}{x^2}$

1. احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.
3. استنتج تغيرات الدالة $f$ على المجال $]0,+\infty[$.
4. شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.
5. بيّن ان $f(\alpha)=3\alpha-\frac{1}{2\alpha^2}$ و أن $1,6<f(\alpha)<2,1$
6. احسب: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
7. أنشئ التمثيل البياني للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس.

من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما:

$$(\ln(x))'=\frac{1}{x} \quad /1$$

$$[\ln g(x)]'=[\ln|g(x)|]'=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

$a>0; b>0; n\in\mathbb{Z}$

$$\ln(a.b)=\ln a+\ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$$

$$\ln(a^n)=n\ln a$$

## التمرين الثالث:

ينسب المستوى إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول هي السنتمتر $(cm)$

الجزء الأول:

$g$ الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية$\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{3x} + 6x$

1. احسب $g'(x)$ و عيّن إشارتها.
2. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
3. شكّل جدول تغيرات الدالة $g$
4. برهن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]-0.2,0[$ (نعتبر أن $e^{-0,6} \approx 0.55$)
ثمّ عيّن حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية$\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{3x} + 9x^2 + 1$

$(\mathscr{C})$تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1. احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$ و برهن أنّ $f'(x) = 3g(x)$
2. احسب$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. أنشئ جدول تغيرات الدالة $f$
4. برهن أنّ: $f(\alpha) = (3\alpha - 1)^2$؛ ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$
5. أكتب معادلة للماس $(T)$ للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$.
6. أنشئ بعناية المماس $(T)$ و المنحنى $(\mathscr{C})$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ (n \in N^*)$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \ (n \in N^*)$$

## التمرين الرابع:

ينسب المستوى إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول هي السنتمتر $(cm)$

الجزء الأول:

$g$ الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}-\ln(1+2e^x)$$

1. احسب $g'(x)$ و عين إشارتها.
2. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x);\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
3. أنشئ جدول تغيرات الدالة $g$.
4. عين حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-2x}\ln(1+2e^x)$

$(\mathscr{C})$تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1. احسب $f'(x)$ و برهن أن $f'(x)=2e^{-2x}g(x)$
2. بوضع $y=1+2e^x$ برهن أن

$$f(x)=\frac{4y}{(y-1)^2}\frac{\ln y}{y}$$

3. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
4. بوضع $z=2e^x$ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
5. شكل جدول تغيرات الدالة $f$
6. اكتب معادلة المماس$(\mathscr{D})$ للمنحنى$(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.
7. أنشئ بعناية المماس$(\mathscr{D})$ و المنحنى$(\mathscr{C})$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\ \ln x=-\infty\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0\ (n\in N^*)$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\ x\ln x=0\quad;\quad\lim_{x\to-\infty}x^n\ln=0\ (n\in N^*)$$

## التمرين الخامس:

الجزء الأول:

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ:

$$g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x$$

1. أحسب g'(x) و عين إشارتها.
2. شكل جدول تغيرات الدالة g (لا يطلب حساب النهايات)
3. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $g(x) \prec 0$

الجزء الثاني:

f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ:

$$f(x) = -x + 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$$

(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول على محور الفواصل 2 cm و على محور التراتيب 1 cm.

1- أ- أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

جـ- برهن أن المستقيم (D) ذو المعادلة: y=-x+1 مستقيم مقارب للمنحنى (C).

د – أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D) على المجال $]0,+\infty[$.

2 – أ – أحسب f '(x) ثم تأكد أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$

ب- استنتج مما سبق جدول تغيرات الدالة f.

جـ- أنشئ المستقيم (D) و المنحنى (C).

الجزء الثالث:

1 – برهن أنه يوجد مماس وحيد للمنحنى (C) عند نقطة J مواز للمستقيم (D)

يطلب تعيين النقطة J و معادلة لهذا المماس.

2 – ليكن x عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1؛ M و N نقطتان من (C) و (D) على الترتيب

أ – عين بدلالة العدد الحقيقي x المسافة MN .

ب – أدرس تغيرات الدالة h المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$

جـ – استنتج من الدراسة السابقة أن المسافة MN تكون أكبر ما يمكن عندما تكون النقطة M منطبقة على J، ثم عين هذه المسافة.

$$x \in \mathbb{R}; \ln(e^x) = x$$
$$x > 0; e^{\ln(x)} = x$$

## التمرين السادس:

الجزء الأول:

ينسب المستوى إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ وحدة الطول 2cm.

$g$ الدالة العددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$g(x)=(ax+b)\,e^{-x}+c$ ؛ $a,b,c$ أعداد حقيقية.

1ـأحسب $g'(x)$ حيث $g'$ الدالة المشتقة للدالة $g$.

2ـإليك جدول تغيرات الدالة $g$ :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g'(x) | | + | | + | | + | | − | |
| g( x ) | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↗ | 2 | ↗ | $e^{-2}+2$ | ↘ | 2 |

باستعمال هذا الجدول بيَن أن: $a=1,b=-1,c=2$

في كل ما سيأتي نعتبر أن: $g(x)=(x-1)\,e^{-x}+2$

3ـ برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $[-1,0]$

4ـ باستعمال الآلة الحاسبة أوجد قيمة تقريبية للعدد a إلى $10^{-1}$.

5ـ أدرس إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$.

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$f(x)=2x+1-xe^{-x}$، $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1ـأحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2ـتحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=g(x)$

3ـاستنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها.

4ـأحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(C_f)$ ؟

5ـأنشئ بعناية $(C_f)$.

حل المعادلة : $g(x)=0$ في المجال $[a;b]$

استعمال مبرهنة القيَم المتوسطة:

- $g$ مستمرة على المجال $[a;b]$.
- $g(a).g(b)<0$

## التمرين السابع:

ينسب المستوى إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ وحدة الطول 2cm. $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة f في هذا المعلم.

الجزء الأول:

$g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة:

$$g(x)=x^2-2\ln x$$

1ـأدرس تغيرات الدالة g.

2ـاستنتج إشارة g(x) من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$.

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$$

1ـأحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. فسّر هندسيا هذه النتيجة.

2ـأحسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$؛ ثم برهن أن المستقيم $(\mathscr{D})$ ذو المعادلة $y=\frac{x}{2}$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$.

3ـ أدرس تغيرات الدالة $f$ و شكّل جدول تغيراتها.

4ـبرهن أنه يوجد مماس وحيد لـ$(C_f)$ مواز لـ$(\mathscr{D})$ عند نقطة B يطلب تعيين إحداثييها.

5ـبرهن أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا $a$ ثم برر أن $0,34 \prec a \prec 0,35$.

6ـأنشئ بعناية المنحنى $(C_f)$.

إثبات أن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$

مستقيم مقارب لمنحنى دالة $f$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

و

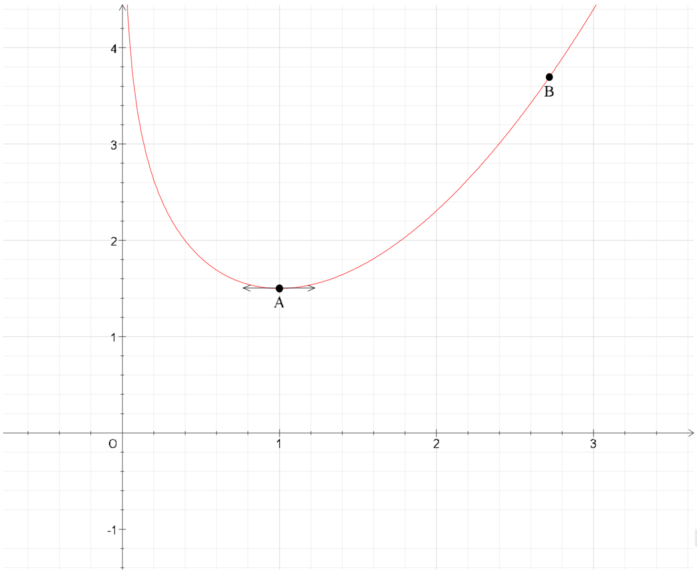
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

## التمرين الثامن:

الجزء الأول:

الشكل المقابل يمثل المنحنى البياني $(C_g)$ لدالة $g$

في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. و حدة الطول 2 cm.




$A(1;\frac{3}{2}); B(e;\frac{e^2}{2})$ نقطتان من المنحنى $(C_g)$.

المماس للمنحنى $(C_g)$ عند النقطة $A$ يوازي محور الفواصل.

1. أحسب $g'(1); g(1); g(e)$.
2. $a$ و $b$ عددان حقيقيان.نفرض أن الدالة $g$ معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة:

$$g(x)=\frac{x^2}{2}+a+b\ln(x)$$

- بين أن: $g(x)=\frac{x^2}{2}+1-\ln x$

3. عين إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما.

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة:

$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\ln x}{x}$ ؛ $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب للمعلم السابق.

1. أحسب نهايات الدالة $f$ عند 0 و عند $+\infty$.
2. أحسب الدالة المشتقة للدالة $f$ و تحقق أن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$
3. استنتج جدول تغيرات الدالة $f$.
4. بيَن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة لكل واحد منهما.
5. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $a$ في المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$.
6. أنشئ $(C_f)$.

$f(x)>0; g(x)>0$

$\ln g(x)=\ln f(x)$

معناه

$f(x)=g(x)$

$e^{g(x)}=e^{f(x)}$

معناه

$g(x)=f(x)$

## التمرين التاسع:

الجزء الأول:

$g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$

1)احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ; $\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)$

2)أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ .شكل جدول تغيرات الدالة $g$

3)برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ في المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

4)عيَن إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما $x$.

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=\frac{1+x}{1+e^{x}}$

1)برهن أن $f(\beta)=\beta$

2)برهن أن $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$ تعطى بالعلاقة: $f'(x)=-\frac{xg(x)}{(1+e^{x})^{2}}$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $[0;1]$ و شكَل جدول تغيرات الدالة $f$.

## التمرين العاشر:

$f$ الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية بـ $\mathbb{R}$: $f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}$

$(C)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2/ احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$.

3/ شكَل جدول تغيرات الدالة $f$.

4/ برهن أن المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=x-\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C)$ بجوار $(+\infty)$

5/ في هذا الجزء نريد حل المعادلة $f(x)=-x$ في المجال $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$

أ/ $h$ الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية بـ $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)+x$

أثبت أن الدالة $h$ مستمرة على المجال $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$.

ب/ أحسب $h'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $h$، و استنتج اتجاه تغير الدالة $h$.

جـ/ احسب $h(-1)$ و $h(-\frac{1}{2})$

د/ استنتج أن المعادلة $f(x)=-x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$.

## التمرين الحادي عشر:

الجزء الأول:

$g$ الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} + x - 1$

1/ احسب $g'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $g$. استنتج اتجاه تغير الدالة $g$.

2/ احسب $g(0)$، ثمّ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $g(x) \geq 0$

3/ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $(e^{-x} + x) \geq 1$

الجزء الثاني:

$g$ الدالة العددية المعرّفة بـ: $f(x) = \dfrac{xe^{x}}{xe^{x} + 1}$

$(C)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ حدّد مجموعة تعريف الدالة $f$.

2/ احسب: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتائج هندسيا.

3/ احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

4/ اكتب معادلة للمماس $(\Delta)$ للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة.

5/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x) + 1}$

6/ استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$؛ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

7/ أنشئ بعناية المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C)$. يعطى: $\dfrac{1}{1-e} \simeq -0.6$

حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = ay + b \quad (a \neq 0)$$

يعطى بالعبارة:

$$\boxed{y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$$

$A(a, f(a))$ نقطة زاوية

- ✓ $f$ مستمرة عند $a$.
- ✓ العدد المشتق على اليمين يختلف عن العدد المشتق على اليسار.

منحنى الدالة $f$ يقبل نصفي مماسين.

## التمرين الثاني عشر:

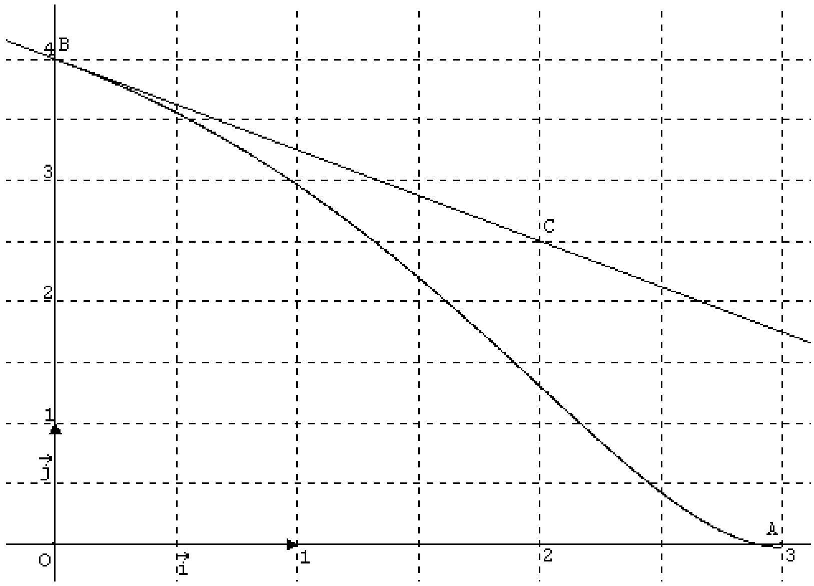
$f$ الدالة العددية المعرفة على المجموعة الأعداد الحقيقية $[0;3]$ بـ:

$$f(x)=k+\frac{1}{4}(ax+b)e^{x}$$

$a,b,k$ أعداد حقيقية.

**الجزء الأول:**

الشكل المقابل يمثل التمثيل البياني للدالة $f$ على المجال $[0;3]$.




- $A$ نقطة من التمثيل البياني فاصلتها $3$.
- المماس عند النقطة $A$ مواز لحامل محور الفواصل.
- النقطة $B(0,4)$ نقطة من المنحنى البياني
- المستقيم $(BC)$ مماس للمنحنى عند النقطة $B$ حيث $C(2,2.5)$.

1. اكتب معادلة للمستقيم $(BC)$.
2. احسب $f(0)\ ;\ f'(0)\ ;\ f'(3)$
3. احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$ بدلالة الأعداد الحقيقية $a,b,k$.
4. استنتج قيم كلا من $a,b,k$.

**الجزء الثاني:**

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=5+\frac{1}{4}(x-4)e^{x}$$

$(C)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:
   $f(x)=(5-e^{x})+\frac{1}{4}xe^{x}$ و استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. فسر النتيجة هندسيا.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ و شكل جدول تغيراتها.
4. أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C)$ و المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=5$.
5. أنشئ بدقة المستقيم $(d)$ و المنحنى $(C)$.

## التمرين الثالث عشر:

$f$ الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

$(C)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f(-x) + f(x) = 2$؛ استنتج أن المنحنى البياني $(C)$ يقبل مركز تناظر يطلب تعيين إحداثييه.

1. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا.
2. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا.
3. احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$ و حدد إشارتها.
4. شكل جدول تغيرات الدالة $f$.
5. اكتب معادلة للماس $(T)$ للمنحنى $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة.
6. برهن أن النقطة $S(0; f(0))$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C)$.
7. أنشئ المماس $(T)$ و المنحنى $(C)$.
8. $m$ وسيط حقيقي. باستعمال المنحنى $(C)$ ناقش حسب قيم الوسيط $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية: $(3 - m)e^x = 1 + m$.

## التمرين الرابع عشر:

الجزء الأول:

$g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x - (x-1)Ln(x-1)$

نذكر أن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} xLnx = 0$

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} (x-1)Ln(x-1)$ و استنتج $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x)$
2. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
3. احسب $g'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $g$ و حدد إشارتها. استنتج اتجاه تغير الدالة $g$.
4. برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left[e+1; e^3+1\right]$
5. شكل جدول تغيرات الدالة $g$، و عين إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$.

$e^{g(x)} > e^{f(x)}$

معناه

$g(x) > f(x)$

$f(x) > 0; g(x) > 0$

$\ln g(x) > \ln f(x)$

معناه

$g(x) > f(x)$

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{Ln(x^2-1)}{x}$

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ وبرهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2. برهن أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و أن: $f'(x)=\dfrac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

3. استنتج إشارة $f'(x)$.

الجزء الثالث:

$h$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=f(e^x)$

عيّن عبارة الدالة $h$.

1. استنتج:
   - $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$
   - اتجاه تغير الدالة $h$ على المجال $]0;+\infty[$.

2. برهن أن الدالة $h$ تقبل قيمة حديّة عظمى عند القيمة $Ln(\sqrt{\alpha})$.

3. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $h(x)\leq\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

## التمرين الخامس عشر:

الجزء الأول:

$P$ كثير الحدود المعرف بـ: $P(x)=x^3+x-2$

1. احسب $P(1)$ ثمّ حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$
2. عيّن حسب قيَم العدد الحقيقي $x$ إشارة $P(x)$.

الجزء الثاني:

$g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=(Ln(x))^3+Ln(x)-2$

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. عيّن حسب قيَم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

الجزء الثالث:

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجموعة $D=]0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{(Ln(x))^3+Ln(x)-2}{(Ln(x))^2}$$

1. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجموعة $D$، يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x) = Ln(x) + \frac{1}{Ln(x)} - \frac{2}{(Ln(x))^2}$$

2. احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) \; ; \; \lim_{x \to +\infty} f(x)$

3. احسب $f'(x)$ و تأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجموعة $D$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(Ln(x))^3}$$

4. استنتج إشارة $f'(x)$.
5. شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

## التمرين السادس عشر:

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان تماما حيث: $a < b$.

$(\zeta)$ التمثيل البياني لدالة اللوغاريتم النيبري في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$A$ و $B$ نقطتان فاصلتيهما على الترتيب $a$ و $b$.

$Q$ و $R$ المسقطين العموديين للنقطتين $A$ و $B$ على الترتيب على حامل محور التراتيب.

1. أوجد معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(\zeta)$ عند النقطة $A$.
2. أوجد الترتيب $P$ لنقطة تقاطع المماس $(T)$ مع حامل محور التراتيب.
3. احسب المسافة $PQ$ و استنتج إنشاء للمماس $(T)$.
4. نذكر أنه من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما $x$ و $y$ لدينا: $ln(x.y) = lx + ln\, y$
   - برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $u$: $ln\sqrt{u} = \frac{1}{2} ln\, u$
   - استعمل النتيجة السابقة لإنشاء النقطة $G$ على محور الفواصل فاصلتها $\sqrt{ab}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته:

$$y = k$$

## التمرين السابع عشر:

$f$ الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^x + 1}$$

$(C)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1– تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$

1. استنتج أن الدالة $f$ فردية.
2. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3. بيّن انه من أجل كل حقيقي $x$ لدينا: $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x - 1}\right)^2$
4. شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ ؛ ثمّ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب يكون: $1 - \frac{2}{e^x + 1} \le \frac{1}{2}x$
5. بيّن أن: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - (1 - \frac{1}{2}x)\right] = 0$ ؛ثمّ فسّر هذه النتيجة بيانيا.
6. أنشئ في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق ،المستقيم ذو المعادلة $y = 1 - \frac{1}{2}x$ و المنحنى $(C)$.

## التمرين الثامن عشر:

الجزء الأول:

$g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = \ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{e^x + 1}$

1. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$
2. احسب $g'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة g و تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g'(x) = -\frac{1}{(e^x + 1)^2}$
3. شكّل جدول تغيرات الدالة g و استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $g(x) > 0$

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = e^x \times \ln(e^{-x} + 1)$ ؛ $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في نستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثمّ فسّر هذه النتيجة بيانيا.
2. تأكد أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = -xe^x + e^x \times \ln(1 + e^x)$
3. استنتج: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثمّ فسر النتيجة هندسيا.
4. أحسب $f'(x)$ و بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = e^x g(x)$
5. استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكّل جدول تغيراتها
6. أنشئ بدقة المنحنى $(\mathscr{C})$.

## التمرين التاسع عشر:

الجزء الأول:

$g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x}$

$(C_g)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. احسب $g'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $g$ و حدد إشارتها.
3. برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$.
4. عيّن حسب قيَم العدد الحقيقي الموجب تماما $x$، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^{x}-ln(x)$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستو المنسوب إلى المعلم السابق.

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما: $f'(x)=g(x)$
3. شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.
4. برهن أن: $f(\dfrac{1}{\alpha})=g(\dfrac{1}{\alpha})$ و أن: $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha^{2}}{\alpha}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
5. أدرس في المجال $]0;+\infty[$ إشارة العبارة: $f(x)-g(x)$
6. أنشئ بعناية المنحنيين $(C_g)$ و $(C_f)$.

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته: $x=a$

## التمرين العشرون:

$k$ عدد حقيقي موجب تماما.

$f_k$ الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [0;+\infty[$ بـ: $f_k(x) = ln(e^x + kx) - x$

$(C_k)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $I$ : $f_k(x) = ln(1 + k\frac{x}{e^x})$
2. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$ و فسر النتيجة بيانيا.
3. احسب $f_k'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f_k$ و حدد إشارتها.
4. شكل جدول تغيرات الدالة $f_k$ .
5. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $I$ : $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$
6. أوجد معادلة للمماس $(T_k)$ للمنحنى $(C_k)$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة.
7. $p$ و $q$ عددان حقيقيان موجبان.أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين $(C_p)$ و $(C_q)$.
8. أنشئ بدقة المنحنيين $(C_1)$ و $(C_2)$.

إذا كان $f''(a) = 0$ و غيّر $f''(x)$ إشارته بجوار $a$

فإن النقطة $A(a, f(a))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة $f$

عند نقطة الانعطاف المماس يخترق التمثيل البياني.

$f$ مستمرة عند $a$ :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$f$ قابلة لاشتقاق في $a$ :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

## التمرين الواحد و العشرون:

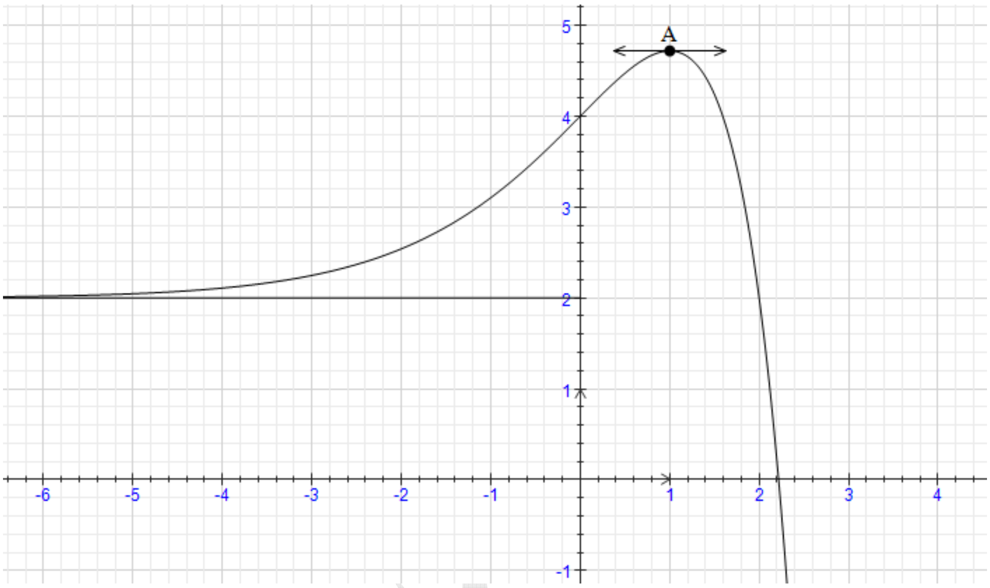
الجزء الأول:

$a; b; c$ أعداد حقيقية.

$h$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (ax + b)e^x + c$

1. احسب بدلالة الأعداد $a$ و $b$، $h'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $h$.

الشكل الموالي هو التمثيل البياني للدالة $h$ في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.




- المماس للمنحنى عند النقطة $A$ ذات الفاصلة $1$ مواز لحامل محور الفواصل.
- النقطة $B(0, 4)$ نقطة من المنحنى.
- المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مستقيم مقارب للمنحنى بجوار $(-\infty)$.

2. من خلال هذه المعطيات بيّن أن: $h(x) = (-x + 2)e^x + 2$
3. بقراءة بيانية؛ عيّن حصرا للعدد $\alpha$ الذي يحقق: $h(\alpha) = 0$
4. عيّن إشارة $h(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$.

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x + 1}$

$(\zeta)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2. تأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x) = \dfrac{xh(x)}{(e^x + 1)^2}$
3. شكل جدول تغيرات الدالة $f$.
4. بيّن أن: $f(\alpha) = \alpha(\alpha - 2)$ و عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$.
5. أنشئ بعناية المنحنى $(\zeta)$

## التمرين الثاني و العشرون:

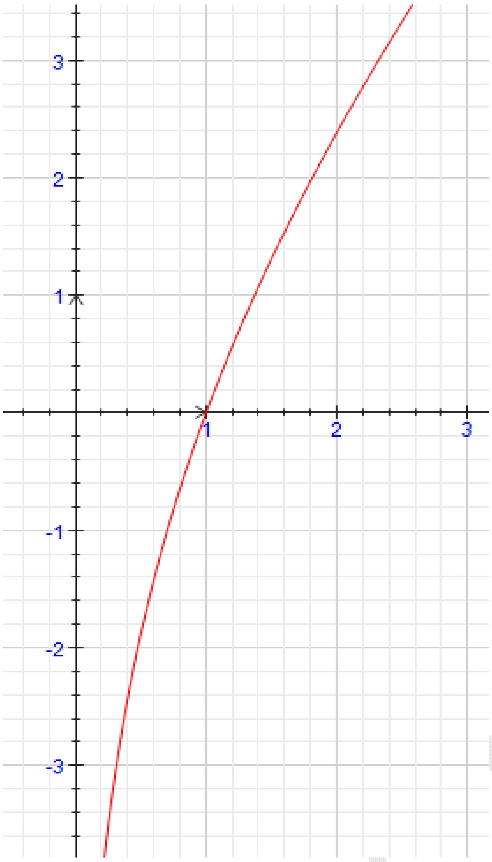
الجزء الأول:

$a; b$ عددان حقيقيان.

$h$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعبارة: $h(x) = x + a + b\ln x$

1. احسب $h'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0; +\infty[$

الشكل الموالي يمثل المنحنى البياني للدالة $h$ في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$




معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $A$ ذات الفاصلة $1$ هي:

$y = 3(x - 1)$.

2. برهن أن: $h(x) = x - 1 + 2\ln x$
3. حدد إشارة $h(x)$ حسب قيم العدد $x$.
4. استنتج إشارة $h(\frac{1}{x})$ حسب قيم العدد $x$.

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة ب:

$f(x) = x - x^2\ln x$ إذا كان $x > 0$ و $f(0) = 0$

1. برهن أن الدالة $f$ مستمرة عند القيمة $a$ حيث: $a = 0$
2. احسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$. و فسر النتيجة بيانيا.
3. احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما؛ و بين أن:

$$f'(x) = xh(\frac{1}{x})$$

4. استنتج إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة $f$.
5. برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[1, 2]$.
6. أنشئ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستو المنسوب إلى المعلم السابق.
7. $m$ وسيط حقيقي.ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$x - x^2\ln x - m = 0$$

## التمرين الثاني و العشرون:

الهدف من التمرين هو إيجاد عدد حلول المعادلة:

$$x^2 + (1-e^2)xe^x - e^{2+2x} = 0...(1)$$

1. برهن أن المعادلة $(1)$ يمكن كتابتها على الشكل:

$$(e^{-2x}x^2 + (1-e^2)xe^{-x} + e^2) = 0....(2)$$

2. بوضع: $y = xe^{-x}$، برهن أن المعادلة $(2)$ تصبح :

$$y^2 + (1-e^2)y + e^2 = 0....(3)$$

3. عيّن العدد الحقيقي $b$ الذي يحقق: $(1-e^2)^2 + 4e^2 = (1+b)^2$
4. حل المعادلة $(3)$.
5. استنتج أنه إذا كان $x$ حلا للمعادلة $(1)$ فهو يكتب على أحد الشكلين:

$x = e^{p(x)}$ أو $x = -e^{q(x)}$، حيث: $p$ و $q$ دوال يطلب تعيينها.

6. أنشئ في نفس المستو المنسوب إلى معلم المنحنيات البيانية للدوال: $k\ ;\ g\ ;\ h$ حيث:

$$h(x) = -e^x \ ;\ g(x) = e^{x+2} \ ;\ k(x) = x$$

7. استنتج عدد حلول المعادلة $(1)$

## التمرين الثالث و العشرون:

الجزء الاول:

$h$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $h(x) = \ln(\dfrac{x+1}{x}) - \dfrac{1}{x+1}$

1. احسب $h'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $h$ وحدد إشارتها و استنتج اتجاه تغير الدالة $h$..
2. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x)\ ;\ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$
3. شكل جدول تغيرات الدالة $h$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم العدد $x$.

الجزء الثاني:

$g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $g(x) = x\ln(\dfrac{x+1}{x})$

1. احسب $g'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $g$. استنتج إشارة $g'(x)$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$.
3. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل:

$g(x) = x\ln(x+1) - x\ln x$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$

4. بيّن أنه بوضع $y = \dfrac{1}{x}$ يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل:

$g(x) = g(\dfrac{1}{y}) = \dfrac{\ln(1+y)}{y}$، استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ و فسر النتيجة بيانيا.

5. شكل جدول تغيرات الدالة $g$.
6. أنشئ بعناية المنحنى البياني للدالة $g$ في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

## التمرين الرابع و العشرون:

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $I = ]-2; +\infty[$ بالعبارة:

$$f(x) = 1 + x\ln(x+2)$$

$(\zeta)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$.
3. احسب $f''(x)$، حيث $f''$ يرمز للدالة المشتقة الثانية للدالة $f$.
4. عيّن إشارة $f''(x)$ على المجال $I$.
5. استنتج أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-0.6; -0.5[$.
6. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ و شكّل جدول تغيراتها.
7. بيّن أن : $f(\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha^2}{\alpha + 2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
8. $A$ نقطة من المنحنى $(\zeta)$ فاصلتها $a$. $(T_a)$ المماس للمنحنى عند النقطة $A$.
   - اكتب معادلة للمماس $(T_a)$.
   - برهن أن المماس $(T_a)$ يمر بمبدأ المعلم إذا وفقط إذا كان $f(a) = af'(a)$.
   - استنتج وجود مماسين $(T_p)$ و $(T_q)$ للمنحنى $(\zeta)$ عند النقطة $A$ و يمران بمبدأ المعلم.
9. أنشئ المماسين $(T_p)$ و $(T_q)$ والمنحنى $(\zeta)$.

## التمرين الخامس و العشرون:

$f$ الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = Ln(e^{2x} + 2e^{x} + 1)$، $(C)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

1. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \; ; \; \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ .
2. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$، يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:
   $f(x) = 2x + Ln(1 + +2e^{-x} + e^{-2x})$. استنتج أن المنحنى $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا بجوار $(+\infty)$ يطلب تعيين معادلته.
3. احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$. و عيّن إشارتها.
4. شكل جدول تغيرات الدالة $f$.
5. اكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة.
6. أنشئ المماس $(T)$ و المنحنى $(C)$.
7. $M$ نقطة من المنحنى $(C)$. $P$ مسقطها العمودي على حامل محور الفواصل. $Q$ مسقطها العمودي على حامل محور التراتيب.
   - هل توجد نقطة $M$ من المنحنى $(C)$ بحيث يكون $MQ = 2MP$ ؟

## التمرين السادس و العشرون:

**الجزء الأول:**

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة: $f(x)=(1-\frac{1}{x})(2-\ln x)$، $(\zeta)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهايتي الدالة $f$ عند $0$ و عند $+\infty$.
2. احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$.
3. $u$ الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة: $u(x)=\ln(x)+x-3$
   1. ادرس اتجاه تغير الدالة $u$. احسب نهايات الدالة $u$ عند $0$ و عند $+\infty$.
   2. برهن أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]2,20;2,21[$
   3. استنتج إشارة $u(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.
   4. استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها.
   5. برهن أن: $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
   6. ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.
   7. أنشئ بعناية المنحنى $(\zeta)$.

**الجزء الثاني**

لتكن $G$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0,+\infty[$ التي تنعدم من $x=1$.

1. دون حساب $G(x)$، أدرس اتجاه تغير الدالة $G$.
2. كيف يكون المماسان لمنحنى الدالة $G$ عند النقطتين ذات الفاصلتين $1$ و $e^2$.
3. برهن أنه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0,+\infty[$ يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:
$$f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$$
4. احسب $H'(x)$ حيث $H(x)=x\ln x-x$.
5. استنتج عبارة $G(x)$ بدلالة $x$.
6. احسب $\lim_{x\to 0} G(x)$ نذكر أن: $\lim_{x\to 0} x\ln x=0$
7. برهن انه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0,+\infty[$ يمكن أن نكتب:
$$G(x)=x\ln x\,(1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-\frac{3}{\ln x})+3$$
8. استنتج $\lim_{x\to+\infty} G(x)$
9. أنشئ في نفس المعلم السابق المنحنى البياني للدالة $G$.

# بكالوريا 2008

I – نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=(ax+b)\,e^{-x}+1$$

حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$ .

عين قيمتي $a$ و $b$ بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى $(C_f)$ و معامل توجيه المماس عند $A$ يساوي $(-e)$.

II – نعتبر الدالة العددية $g$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=(-x-1)\,e^{-x}+1$$

و $(C_g)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا.(نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$ )

ب) ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بيّن أن المنحنى $(C_g)$ يقبل نقطة انعطاف $I$ يطلب تعيين احداثييها.

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى $(C_g)$ عند النقطة $I$ .

هـ) ارسم $(C_g)$.

و) $H$ الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يأتي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان.

عيّن $\alpha$ و $\beta$ بحيث تكون $H$ دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة $g$ و التي تنعدم عند القيمة 0.

III ) لتكن $k$ الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي:

$$k(x)=g\left(x^2\right)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة $k$ ثم شكل جدول تغيراتها .

# بكالوريا 2009

الجزء الأول:

$h$ دالة العددية المعرفة على المجال $\left]-1;+\infty\right[ \ = I$ بـ:

$$h(x) = x^2 + 2x + ln(x+1)$$

1. احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} h(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} h(x)$

2. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $I$ :

$$h'(x) = \frac{1 + 2\,ln((x+1)^2)}{x+1}$$

- استنتج اتجاه تغير الدالة $h$ ثم انجز جدول تغيراتها.

3. احسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$ من المجال $I$ .

الجزء الثاني:

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-1;+\infty\right[ \ = I$ بـ:

$f(x) = x - 1 - \dfrac{ln(x+1)}{x+1}$ ، $(C)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ثمّ فسر النتيجة بيانيا.

2. أ/ باستخدام النتيجة $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$ برهن أن: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{ln\,u}{u} = 0$

ب/استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3. احسب: $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (x-1)\right]$ و استنتج أن المنحنى $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا.

- ادرس وضعية المنحنى $(C)$ بالنسبة لمستقيمه المقارب.

4. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $I$ : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

5. بيّن أن المنحنى $(C)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3.3$ و $3.4$.

أنشئ المنحنى $(C)$.

6. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمحنى $(C)$ و المستقيمات التي معادلاتها:

$$x = 1 \;;\; x=0 \;;\; y=x+1$$

الامتحان الأول في مادة الرياضيات ديسمبر 2009

الأقسام: الثالثة علوم تجريبية المدة: ساعتان

---

## التمرين الأول: [13 نقطة]

$f$ الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - \frac{1}{1+e^{x}}$

$(\zeta)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$I)$ 1) احسب: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

2) احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة للدالة $f$ و عيّن إشارتها.

3) أنشئ جدول تغيرات الدالة $f$.

$II)$ 1) بيّن أن المستقيم $(d_1)$ ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\zeta)$ بجوار $(-\infty)$

و أن المستقيم $(d_2)$ ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\zeta)$ بجوار $(+\infty)$.

2) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $c$ في المجال $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

3) تحقق أن: $e^{c} = \frac{1}{c} - 1$

4) أنشئ المنحنى $(\zeta)$ و مستقيماته المقاربة.

## التمرين الثاني: [07 نقاط]

نريد تعيين الدوال $f$ التي تحقق الشروط الثلاثة التالية:

- $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f(-x).f'(x) = 1$
- $f(0) = -4$

نفرض أنه توجد دالة عددية $f$ تحقق الشروط السابقة و نضع من أجل كل عدد حقيقي $x$:

$$g(x) = f(-x).f(x)$$

1. احسب الدالة المشتقة للدالة $g$.
2. استنتج أن الدالة $g$ ثابتة على $\mathbb{R}$ و عيّن قيمتها.
3. تأكد أن الدالة $f$ حل للمعادلة التفاضلية: $y' = \frac{1}{16} y$ و استنتج عبارة الدالة $f$.

# مناقشة الامتحان:

## التمرين الأول:

$$f(x) = x - \frac{1}{1+e^x}$$

.1 $(I$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

.2

الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها و لدينا: $f'(x) = 1 + \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

زيادة على ذلك $f'(x) > 0$ و بالتالي الدالة $f$ متزايدة تماما على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ .

.3 جدول التغيرات :

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

.1 $(II$ المستقيمات المقاربة:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (x - \frac{1}{1+e^x} - x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (-\frac{1}{1+e^x}) = 0$$

و بالتالي المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى بجوار $(+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} (x - \frac{1}{1+e^x} - x + 1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x + 1) = \lim_{x\to\infty} (-\frac{1}{1+\underbrace{e^x}_{\searrow 0}} + 1) = 0$$

و بالتالي المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب للمنحنى بجوار $(-\infty)$.

.2 إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة:

الدالة $f$ مستمرة على المجال $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

$$f(\frac{1}{2}).f(0) = (\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{\frac{1}{2}}}}_{>0}).(\underbrace{0 - \frac{1}{1+1}}_{<0}) < 0$$

زيادة على ذلك الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $c$ في المجال $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

.3

العدد الحقيقي $c$ يحقق:

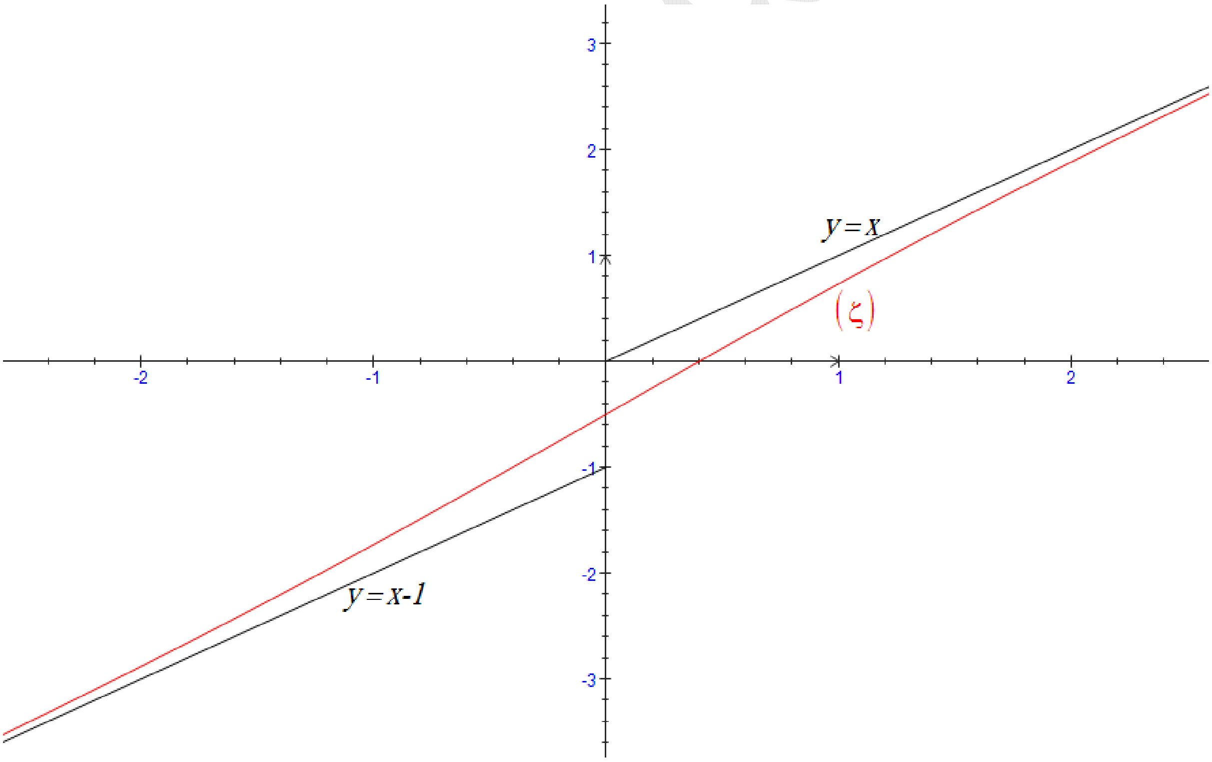
$$f(c)=0$$

وبالتالي:

$$c-\frac{1}{1+e^{c}}=0 \rightarrow c=\frac{1}{1+e^{c}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{c}=1+e^{c} \rightarrow \boxed{e^{c}=\frac{1}{c}-1}$$

.4 التمثيل البياني:



**التمرين الثاني:**

1. الدالة $g$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$g'(x) = -f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x)$$
$$g'(x) = -1 + 1 = 0$$

و بالتالي الدالة $g$ ثابتة على $\mathbb{R}$ و يكون من أجل كل عدد حقيقي $x$ :

$$g(x) = g(0) = f(0).f(0) = 16$$

2. نتأكد بسهولة أن الدالة $f$ حل للمعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{16}y$ و ذلك لأن:حسب السؤال السابق يكون: $f(-x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{16}{f(x)}$ و حسب الشرط الثاني لدينا: $f(-x) = \frac{1}{f'(x)}$ و منه: $\frac{1}{f'(x)} = \frac{16}{f(x)} \to \boxed{f'(x) = \frac{1}{16}f(x)}$ و هو المطلوب.

3. إن عبارة الدالة $f$ تعطى بـ: $f(x) = Ce^{\frac{1}{16}x}$ و بما أن $f(0) = -4$ ، فإن $C = -4$ و بالتالي تكون: $\boxed{f(x) = -4e^{\frac{1}{16}x}}$