تمرين 1 :

(U_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول U_0 و بالعلاقة التراجعية $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_0 = -2$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n < 6$
2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n = 6 - 8 \cdot 2^{-n}$
3. حدد اتجاه تغير المتتالية (U_n).

تمرين 2: x ، y ، z ثلاثة حدود موجبة و متتابعة من متتالية حسابية حيث:

$$\begin{cases} x+y+z = 30 \\ x^2+y^2+z^2 = 318 \end{cases}$$

أوجد x ، y ، z

تمرين 3: أثبت أنه إذا كانت a، b ، c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية فإن : $b^2+bc+c^2 ; a^2+ac+c^2 ; a^2+ab+b^2$ كذلك.

تمرين 4 : (V_n)متتالية عدية معرفة بالعلاقة التراجعية :

من أجل كل عدد طبيعي n $V_0 = 4$ $V_{n+1} = \frac{9V_n - 49}{V_n - 5}$

1. بين أنـــه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $V_n \neq 7$
2. لتكن المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي :

$$U_n = \frac{1}{V_n - 7}$$

أ. بين أن (U_n)متتالية حسابية.عين اساسها و حدها الأول

أحسب كلا من U_n و V_n بدلالة ن .

ب. أوجد قيمة nحتى يكون : $V_n = \frac{59}{8}$

تمرين 5:

1. n عدد طبيعي ، (U_n) متتالية حسابية متزايدة حدها الأول U_0 وأساسها r .

عين U_2 و r بحيث :

$$\begin{cases} U_1+U_2+U_3 = 24 \\ U_1^2+U_2^2+U_3^2 = 210 \end{cases}$$

استنتج U_n بدلالة n و احسب المجموع S_n حيث :

$S_n = U_0 + U_1+U_2+U_3 \ldots\ldots\ldots U_n$

2. لتكن المتتالية العددية (V_n) العرفة بالعلاقة :

$V_n = 2^{5+3n}$

بين أن (V_n) متتالية هندسية .

أحسب بدلالة n ، S و P حيث :

$S = V_0 + V_1+V_2+\ldots\ldots\ldots V_n$

$P = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \ldots\ldots\ldots V_n$

تمرين6:

(U_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $U_0 = 2$ $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n + 2$

لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي: $V_n = U_n - 2n$

1. أثبت أن(V_n)متتالية هندسية .

أكتب V_n ثم U_n بدلالة n .

ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2. احسب بدلالة n :

$S_1 = U_0 + U_1+U_2+U_3 \ldots\ldots\ldots U_n$

$S_2 = V_0 + V_1+V_2+\ldots\ldots\ldots V_n$

تمرين 7 :

1. بين أنه إذا كانت a ، b ، c ثلاثة حدود متعاقبة بهذا الترتيب لمتتالية هندسية فإن :

$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$.

2. أوجد ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 و مجموع مربعاتها 3276.

تمرين 8 : (V_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $V_0 = 1$ $V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n + 6$

1. أثبت أن المتتالية (V_n) متزايدة تماما
2. لتكن المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي : $U_n = V_n + \beta$

حيث : β عدد حقيقي

أ. عين قيمة β حتى تكون (U_n) متتالية هندسية.

ب. أحسب U_n بدلالة n ثم V_n بدلالة n .

جـ . أحسب بدلالة n :

$S_1 = U_0^2 + U_1^2+U_2^2+\ldots\ldots\ldots U_n^2$

$S_2 = V_0 + V_1+V_2+\ldots\ldots\ldots V_n$

ثم الجداء: $P = U_0^2 \times U_1^2 \times U_2^2 \times \ldots\ldots\ldots U_n^2$

تمرين 9: (V_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} V_0 = 2 \ , V_0 = 3 \\ V_{n+2} = \frac{2V_{n+1} + 3V_n}{5} \end{cases}$$

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي

$U_n = V_{n+1} - V_n$

1. أثبت أن (U_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

عبر عن U_n بدلالة n و أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2. أحسب بدلالة n المجموع

$S_1 = U_0 + U_1+U_2+U_3 \ldots\ldots\ldots U_n$

ثم استنتج عبارة V_n بدلالة ن.

تمرين 10: (V_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $V_0 = 4$ و بالعلاقة التراجعية : $V_{n+1} = \frac{3V_n - 5n - 20}{4}$

و لتكن المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي: $U_n = V_n + \alpha n$

1. عين α حتى تكون (U_n) متتالية هندسية
2. أكتب V_n بدلالة n و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.
3. أحسب بدلالة n المجموعين :

$S_1 = U_0 + U_1+U_2+U_3 \ldots\ldots\ldots U_n$

$S_2 = U_0 + \frac{4}{3}U_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 U_2 + \ldots\ldots\ldots \left(\frac{4}{3}\right)^n U_n$

تمرين 11: (U_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $U_1 = -1$ و بالعلاقة : $U_{n+1} = \frac{n.U_n + 3n + 6}{2n+2}$ ، $n \in N^*$

(V_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :حيث : $V_n = n(3 - U_n)$

1. أثبت أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
2. أحسب V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n. هل المتتالية (V_n) متقاربة ؟
3. أحسب بدلالة n $S_1 = V_1+V_2+\ldots\ldots\ldots V_n$

و استنتج: $S_1 = U_1+2U_2+3U_3 \ldots\ldots\ldots nU_n$

4.نضع : $P_n = V_1 \times V_2 \times \ldots\ldots\ldots \times V_{n+1}$

أثبت أن : $P_n = \sqrt{2^{(4-n)(1+n)}}$.

تمرين 12:لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ:

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{\sqrt{9+u_n^{\,2}}} \end{cases}$$

1- أ) برهن بالتراجع أن : $u_n \succ 0$

ب) برهن أن (u_n) متناقصة .

2- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = \dfrac{18}{u_n^{\,2}}$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أحسب v_n بدلالة n.ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ) أحسب بدلالة n المجموع $s_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots v_n$

ثم استنتج المجموع : $s_2 = u_0.v_0 + u_1.v_1 + u_2.v_2 + \ldots\ldots\ldots u_n.v_n$

تمرين 13:

لتكن المتتالية (a_n) و المتتالية (b_n) المعرفتين كما يلي :

$a_0 = 2$ ، $b_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي $n \in N$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1- نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = a_n - b_n$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ب) أحسب v_n بدلالة n

جـ) أثبت أن (v_n) متقاربة .

2- أثبت أن (a_n) متزايدة و أن (b_n) متناقصة .

3- برهن بالتراجع أن : $a_n \le b_n$. استنتج أن : $a_0 \le a_n \le b_n \le b_0$

4- لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_n = a_n + b_n$

أ) أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية ثابتة يطلب تعيينها.

ب) أكتب a_n و b_n بدلالة n .

ج) أثبت أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان.

تمرين 14:

لتكن الدالة f المعرفة على R بـ :

$$\begin{cases} f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2 & \text{إذا كان } x < 0 \\ f(x) = \ln(1-x^3) & \text{إذا كان } x \ge 0 \end{cases}$$

1- بين أن الدالة f مستمرة و قابلة للاشتقاق عند الفاصلة 0

2- بين أن الدالة f متناقصة على المجالين $]-\infty;0[$ و $[1;+\infty[$ و متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

3- بين أنه إذا كان $x \in \left[\frac{4}{9};1\right]$ فإن $f(x) \in \left[\frac{4}{9};1\right]$

4- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5- أنشئ المنحنى C_f .

6- لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = \dfrac{4}{9}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2$

أ) بين بالتراجع أنه من أجل كل $n \in N$ فإن : $\dfrac{4}{9} \le u_n \le 1$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

تمرين 15:

I. لتكن الدالة g المعرفة على R بـ : $g(x) = e^{-x} + x - 1$

1) أحسب $g'(x)$ و استنتج اتجاه تغير g .

2) استنتج إشارة g . و أن : $e^{-x} + x \ge 1$

II. لتكن الدالة العددية : $f(x) = \dfrac{x}{x + e^{-x}}$ ،

1- تحقق f معرفة على R .

2- عين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. فسر هندسيا النتيجتين .

3) أ- بين أن من أجل $x \in R$ فإن : $f'(x) = \dfrac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

ب- شكل جدول تغيرات f .

4) أ- اكتب معادلة المماس T في المبدأ O .

ب- استنتج الوضع النسبي للمنحنى C_f و المماس T .

ج- أنشئ T ، C_f .

III.لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + e^{-u_n}}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1) بين بالتراجع ان : $0 \le u_n \le 1$

2) بين أن (u_n) متناقصة يمكن استعمال نتيجة السؤال II.4) ب.

3) استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

تمرين 16:

الجزء الأول: نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $]0;+\infty[$ بـ :

$g(x) = x - 1 - \ln x$ و $h(x) = x + (x-2)\ln x$

1. ادرس تغيرات g . استنتج أن $g(x) \ge 0$

2. بين أن : $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$

3. بين أنه من اجل كل $x > 0$ فإن : $(x-1)\ln x \ge 0$

4.استنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$$

1.أدرس تغيرات f

3. أ) أكتب معادلة المماس عند النقطة $A(1;1)$

ب) تحقق أنه من أجل $x > 0$: $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$

ج) ادرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ $\mathcal{C}_f$ و المستقيم الذي معادلته : $y = x$.

4.أنشئ Δ و $\mathcal{C}_f$.(نقبل أن $\mathcal{C}_f$ يقبل نقطة انعطاف محصورة بين 1 و1,5).

الجزء الثالث :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = \sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1- بين بالتراجع أنه من أجل كل $n \in N$ فإن : $1 < u_n < e$

2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة) يمكنك استعمال نتيجة السؤال 3) من الجزء الثاني).

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .