نهائي علوم تجريبية الأستاذ: علاق	سلسلة تمارين في الأعداد المركبة بكالوريات مغربية	متقن ميلودي العروسي الوادي

التمرين 01 :

1 / أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب : $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2+\left(\sqrt{3}+7i\right)z+4\left(-3+i\sqrt{3}\right)=0$

2/ ليكن z_1, z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $\text{Re}(z_2)=0$ ، بين أن : $\dfrac{z_1+2i}{z_2+2i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

3/ في المستوي المركب المزود بالمعلم $\left(o\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ \right)$ تعطى النقط : $c(z_2), b(z_1), a(-2i)$

أ- حدد قيس الزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac}}\right)$

ب- استنتج طبيعة المثلث abc

التمرين 02 :

1/ تعطى المعادلة (E) : $z^2-2z+2=0$

أ- تحقق أن العدد المركب Z_1 حل للمعادلة (E) حيث : $Z_1=\dfrac{3+i}{2-i}$

ب- استنتج الحل الثاني Z_2 للمعادلة (E)

2/ في المستوي المنسوب للمعلم المتعامد و متجانس $\left(o\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ \right)$ نعتبر النقطة $M(X,Y)$ لاحقتها Z وليكن :

$$K=\frac{(Z-Z_1)(Z-Z_2+1)}{Z+1}$$

أ- أكتب K على الشكل الجبري

ب- حدد مجموعة النقط M بحيث يكون العدد المركب K تخيلي صرف

التمرين 03 :

نعتبر العدد المركب : $K=\dfrac{Z}{1+iZ}$ حيث $Z\in\mathbb{C}^*-\{i\}$

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $K=\dfrac{1}{Z}$. ليكن z_1, z_2 حلي المعادلة حيث : $\text{Re}(z_1)\prec 0$

2/ أكتب z_1, z_2 على الشكل المثلثي

3/ أحسب : $\left(z_1\right)^{2005}+\left(z_2\right)^{2005}$.

4/ أثبت أن : K تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان Z تخيلي صرف

5 / حدد الجذور الرابعة للعدد المركب $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

التمرين 04:

1/ عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $u=2-2\sqrt{3}i$

2/ نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) المعرفة : $z^2+\left(\sqrt{3}+7i\right)z-4\left(3-\sqrt{3}i\right)=0$

أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) حيث $\left(\operatorname{Re}(z_1)\prec\operatorname{Re}(z_2)\right)$

ب- تحقق أن $4\left(z_1+2i\right)=u\left(z_2+2i\right)$

3 / ينسب المستوي للمعلم المتعامد و المتجانس $\left(o\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\ \right)$، نعتبر النقط : $c\left(z_2\right),b\left(z_1\right),a\left(-2i\right)$

أ- حدد قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac}\right)$

ب- بين أن المثلث abc متقايس الأضلاع

ج- أكتب العدد المركب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل ألمثلثي

د- استنتج الشكل الجبري للعدد المركب $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^6$

ه- بين أن النقط $O,M_1\left(Z_1^6\right),M_2\left(Z_2^6\right)$ في استقامية

التمرين 05 :

نعتبر التطبيق g من $\mathbb{C}-\{i\}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرفة : $g\ (z)=\frac{z+2}{z-i}$

1/ أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $g\left(z\right)=iz$

ب- ليكن Z_1,Z_2 حلي المعادلة السابقة . أحسب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2002}+\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2002}$

ج- أوجد الأعداد الصحيحة n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{n}+\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ عددا حقيقيا.

2/ ينسب المستوي المركب للمعلم المتعامد و المتجانس $\left(o\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\ \right)$.

حدد و أنشئ مجموعة النقط $M\ (z)$ بحيث :

أ- $\left|g\ (z)\right|=1$

ب- $\operatorname{Re}\left[g\ (z)\right]=0$

التمرين06 :

ليكن α **عدد مركب معلوم ، نعتبر المعادلة** (E) **:** $z^2+\alpha(\alpha+i)z+i\alpha^3=0$

1/ **أنشر** $(\alpha^2-\alpha i)^2$

2/ حدد(بدلالة α) Z_1, Z_2 حلي المعادلة (E)

3/ نفرض $\alpha=\left[1,\frac{\pi}{12}\right]$. أكتب Z_1, Z_2 على الشكل المثلثي

4/ بين أن $z_1^{12}+z_2^{12}=0$

التمرين 07 :

يعطى : $P(Z)=Z^3+\left(3-I\sqrt{3}\right)Z^2+2\left(1-I\sqrt{3}\right)Z-I\sqrt{3}$

1/ بين أن : $P(-1)=0$

2/ أ- بين أن : $P(Z)=(Z+1)\left[Z^2+\left(2-I\sqrt{3}\right)Z-I\sqrt{3}\right]$

ت- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(Z)=0$ و أكتب الحلول على شكلها ألمثلثي

حيث Z_1, Z_2 الحلين غير الحقيقيين للمعادلة $P(Z)=0$ بحيث : $(\mathrm{Re}(z_1)\prec\mathrm{Re}(z_2))$

ج- بين أن : $Z_1^6+27Z_2^3=0$

3/ في المستوي المركب المنسوب للمعلم المتعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ تعطى النقط :

$C(-1), B\left(\frac{-1+I\sqrt{3}}{2}\right), A\left(-\frac{3}{2}+I\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

أ- حدد الشكل ألمثلثي للعدد المركب : $\frac{Z_A-Z_C}{Z_B-Z_C}$

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين 08 :

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2+(1+3I)Z-4=0$ (Z_1, Z_2 الحلين بحيث : $|Z_1|\prec|Z_2|$)

2/ تعطى المعادلة (E) **:** $Z^3+(1+I)Z^2+(2-2I)Z+8I=0$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا Z_0 يطلب تعينه

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

3/ نعتبر في المستوي المركب النقط التالية : $C(Z_2), B(Z_1), A(Z_0)$

أ- أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب : $K=\frac{Z_2-Z_1}{Z_0-Z_1}$

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين 09 :

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): Z^3+\left(\sqrt{3}-I\right)Z^2+\left(1-I\sqrt{3}\right)Z-I=0$

1/ أ- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا Z_0 يطلب تعينه

ب- حدد عددين a و b حيث : $z^3+\left(\sqrt{3}-i\right)z^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)z-i=(z-i)\left(z^2+az+b\right)$

ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+\sqrt{3}z+1=0$

د- استنتج حلول المعادلة (E) .

2/ نضع $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, z_1=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, z_0=i$

أ- أكتب كل من Z_2, Z_1, Z_0 على الشكل المثلثي

ب- أحسب العدد : $S=Z_0^{60}+Z_1^{60}+Z_2^{60}$

3/ في المستوي المركب المنسوب للمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ تعطى النقط :

$C\ (Z_2), B\ (Z_1), A\ (Z_0)$

أ- أكتب على الشكل المثلثي العدد : $l=\frac{z_2-z_1}{z_0-z_1}$

ب- استنتج قيسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$

ج- ماهي طبيعة المثلث ABC

التمرين 10:

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2-\left(\sqrt{3}-3i\right)z-2\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$

2/ في المستوي المركب المنسوب للمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ تعطى النقط : A و B لاحقتيهما :

$Z_B=-\sqrt{3}+i, Z_A=2i$

أ– حدد على الشكل المثلثي العدد : $\frac{Z_A}{Z_B}$

ب–استنتج أن المثلث OAB متساوي الأضلاع .

ج- عين Z_H لاحقة النقطة H حتى يكون الرباعي ABIH متوازي أضلاع (I منتصف القطعة $[OB]$)

د- بين أن العدد $\frac{Z_H-Z_A}{Z_H}$ تخيلي صرف

ه- استنتج طبيعة المثلث OAH

التمرين 11:

1/ نعتبر العدد المركب $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ– أكتب j على الشكل المثلثي

ب– حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2=j$ ثم الستنتج حل المعادلة : $z^2=\overline{j}$

2/ حل المعادلة : $v^4+v^2+1=0$ حيث $v\in\mathbb{C}$

3/حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة :
$$\begin{cases} u^2-v^2=1 \\ u.v=i \end{cases}$$