I.نتائج ، خواص و تطبيقات:

1.نتـائج:

في كلّ ما يلي ، يرمز a إلى عدد حقيقي:

(1. $\ln a$ مُعرّف يعني $a>0$ **(2.** $\ln a>0$ يعني $a>1$ **(3.** $\ln a=0$ يعني $a=1$ **(4.** $\ln a<0$ يعني $0<a<1$ **(5.** $\ln e^a=a$ **(6.** $e^{\ln a}=a$ ؛ $a>0$ **(7.** $\ln 1=0$ **(8.** $\ln e=1$

2.خواص:

في كلّ ما يلي ، يرمز a و b إلى عددَيْن حقيقيّيْن موجبيْن تماما:

(1. $\ln a=\ln b$ يعني $a=b$ **(2.** $\ln a>\ln b$ يعني $a>b$

(3. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ **(4.** $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

(5. $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ **(6.** $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$ ؛ $n\in\mathbb{Q}$.

3.تطبيقات:

ت1: اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

(1 $e^{\ln 5}+e^{-\ln 3}$ **(2** $e^{1+\ln 2}$ **(3** $e^{-2\ln 3}$ **(4** $\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\ln^2\left(\frac{1}{e}\right)$

ت2: حل، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة $2\ln x=\ln(x-4)+\ln(2x)$.

ت3: حل، في $\mathbb{R}$ ، المتراجحة $\ln x+\ln(4-x)\le\ln(2x-1)+\ln 3$

ت4: حل، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة $(\ln x)^2+2\ln x-3=0$.

II.دراسة إشارة بعض العبارات:

في كلّ ما يلي ، ترمز a ، b ، c ، α ، β إلى أعداد حقيقيّة.

1.دراسة إشارة العبارة $a.\ln(\alpha x+\beta)+b$ حيث $a.\alpha\neq 0$:

لدراسة إشارة العبارة $a.\ln(\alpha x+\beta)+b$ على **مجموعة تعريفها**، نبحث عن القيمة التي تعدمها ولتكن x_0 ،ثمّ نُحدّد إشارتها كما في الجدول التالي:

x	x_0	
$a.\ln(\alpha x+\beta)+b$	عكس إشارة $a\alpha$	0 نفس إشارة $a\alpha$

تطبيق:

ادرس إشارة كلٍّ من **1)** $\ln(x+2)-1$ ؛ **2)** $\ln(-x+1)+2$.

2.دراسة إشارة العبارة $a(\ln x)^2+b\ln x+c$ حيث $a.b.c\neq 0$:

لدراسة إشارة العبارة $a(\ln x)^2+b\ln x+c$ على $\mathbb{R}^{*+}$ ، نقوم بما يلي:

نضع $\ln x=X$ ، فتصبح العبارة $a.X^2+b.X+c$ ، ونعيّن قيم X التي تعدمها- إنْ وُجدت- ثمّ نستنتج قيم x التي تعدم العبارة ، و في الأخير، نشكّل جدولا ندرس فيه إشارة العبارة،مستخدمين القواعد المعروفة لإشارة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية.

تطبيقات:

ت1: ادرس إشارة : **1)** $(\ln x)^2+2\ln x-3$ **2)** $(\ln x)^2-\ln x+1$

ت2: حل، في $\mathbb{R}$ ، المتراجحة $(\ln x)^2+2\ln x-3>0$.

III.تحويل بعض عبارات الدوال:

1) $\ln\left(u(x)^n\right)=n.\ln(u(x))$ ، إذا كان n **فرديّا**.

2) $\ln\left(u(x)^n\right)=n.\ln|u(x)|$ ، إذا كان n **زوجيّا**.

IV.حساب النهايات :

1.النهايات الشهيرة:

(1 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\ln\alpha=+\infty$

(2 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{\alpha}=0$ $\leftarrow$ $\left(n>0\ ;\ \lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{\alpha^n}=0\right)$

(3 $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\ln\alpha=-\infty$ $\leftarrow\downarrow$ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{\ln\alpha}=+\infty$

(4 $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\alpha\ln\alpha=0$ $\leftarrow$ $\left(n>0\ ;\ \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\alpha^n\ln\alpha=0\right)$

(5 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$ $\leftarrow$ $\left(\lim\limits_{\alpha\to 1}\frac{\ln\alpha}{\alpha-1}=1\right)$

2.تطبيقات على النهايات:

ت1: ادرس ، في كل حالة ، نهاية الدالة f عند $+\infty$:

1. $f(x)=x+1-\ln(x-2)$ **2.** $f(x)=\frac{\ln(x-1)}{x+3}$

3. $f(x)=x+1-\ln(x-2)^2$ **4.** $f(x)=\frac{1+2\ln x}{1-3\ln x}$

ت2: احسب ، في كل حالة ، النهاية :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x^2+3x+1\right)\ln x$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ **4.** $\lim\limits_{x\to-1^-}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x}{x+1}-\ln(x+1)$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2)}{x}$ **8.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln|-4x+2|-\ln|2x-1|$

V.قانونا الاشتقاق:

*إذا كانت u دالة موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال I ، فإنّ : $\left(\ln[u(x)]\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

*إذا كانت u دالة لا تنعدم و تقبل الاشتقاق على مجال I ، فإنّ : $\left(\ln|u(x)|\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

تطبيقات:

ت1: f دالة معرّفة على $D_f=]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ بـ $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ ؛ ادرس تغيّرات f .

ت2: f دالة معرّفة على $D_f=]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=(\ln x)^2+2\ln x-3$ ؛ ادرس تغيّرات f .

ت3: f دالة معرّفة على $D_f=\mathbb{R}-\{1;2\}$ بـ : $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$ ؛ ادرس تغيّرات f .

من إعداد الأستاذ: محمّد جبال

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com