تمارين للمراجعة – الدوال العددية

التمرين 01 :

عين النهاية عند $+\infty$ والنهاية عند $-\infty$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x)=5x^2$ ، $f(x)=-3x^2$ ، $f(x)=7x^3$ ، $f(x)=-0,5x^3$

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^2+\sqrt{2}$ ، (2 $f(x)=3x-200$ ، $f(x)=\dfrac{-3x^2+1}{6000}$ ،

$f(x)=-\sqrt{3}x^3+\dfrac{3}{5}$ ، $f(x)=\dfrac{5}{7}x^3+\dfrac{8\sqrt{2}}{2}$

الجواب :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

التمرين 02 :

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+5)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^2+8x-2)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3-x^2-3x+2)$ ،

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^3+18x^2-x\sqrt{2}+10)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-3x^3+8x^2-x-1)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(7x^3+2x^2-x-1)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x^6+x^4-3x^2)$

، $\lim\limits_{x\to-\infty}(19x^2+5x-3)$

الجواب :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+5)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^2+8x-2)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3-x^2-3x+2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^3+18x^2-x\sqrt{2}+10)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-3x^3+8x^2-x-1)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(7x^3+2x^2-x-1)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x^6+x^4-3x^2)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(19x^2+5x-3)=-\infty$

التمرين 03 :

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(3+\dfrac{5}{2x-2}\right)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\left(\dfrac{-3x+2}{2+x}\right)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}\left(\dfrac{-7}{x+4}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{-3x+1}{4x^2-4x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-10}{x^3-x^2}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+5}{3x-1}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+8}{4x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+5x}{4x-x^2}$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-3x+4}{16-x^4}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2x^5}{x^3+x}$

الجواب :

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}\left(\frac{-7}{x+4}\right)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\left(\frac{-3x+2}{2+x}\right)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(3+\frac{5}{2x-2}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+5}{3x-1}=\frac{2}{3}$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{-10}{x^3-x^2}\right)=0$ ، $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{-3x+1}{4x^2-4x+1}\right)=-\infty$ ، ،

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5x^2-3x+4}{16-x^4}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{5}{x^2}=0$ ، $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3+5x}{4x-x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}x=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5x+8}{4x-2}=\frac{5}{4}$ ، ،

$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x+2x^5}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to -\infty}2x^2=+\infty$ ،،

التمرين 04 :

في الأشكال (1)، (2)، (3)، (4)، (5) الموالية (C) هو التمثيل البياني لدالة f بالنسبة إلى معلم $(0,I,J)$

بالإعتماد على الشكل (1) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x),\ \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x),\ \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (2) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (3) عين النهايات التالية:

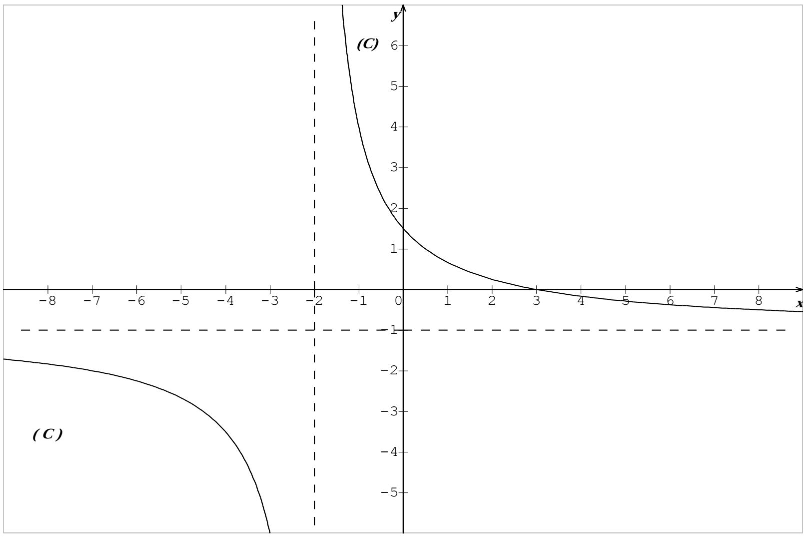
$$\lim_{x\to -\infty} f(x),\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x),\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (4) عين النهايات التالية:

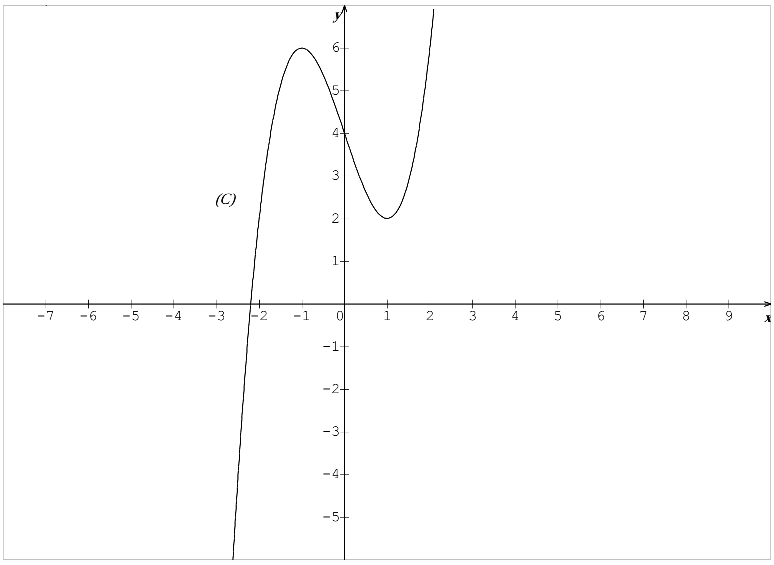
$$\lim_{x\to -\infty} f(x),\ \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x),\ \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)$$

بالإعتماد على الشكل (5) عين النهايات التالية:

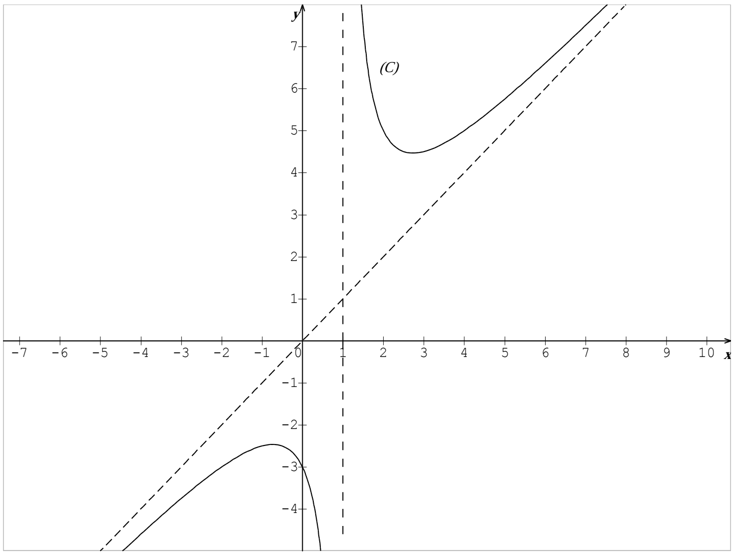
$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x), \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$$



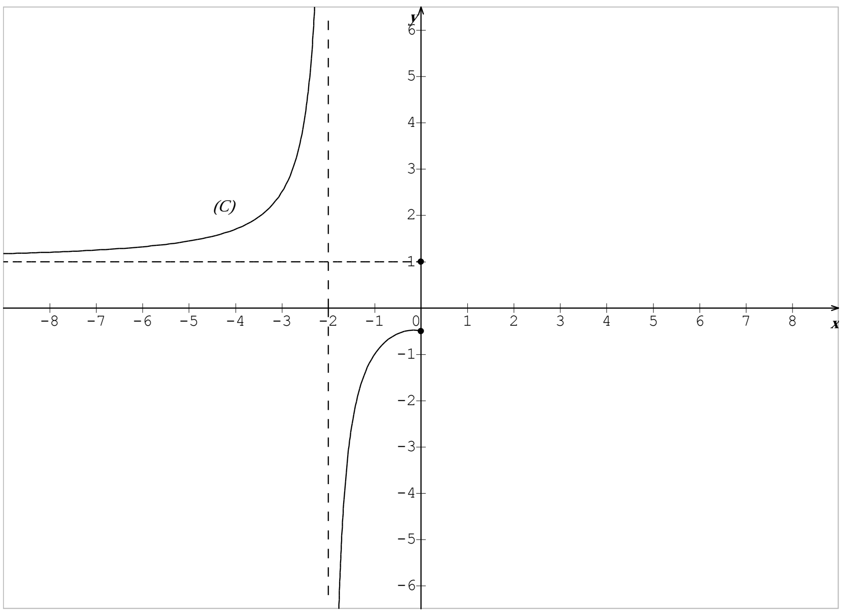
الشكل (1)



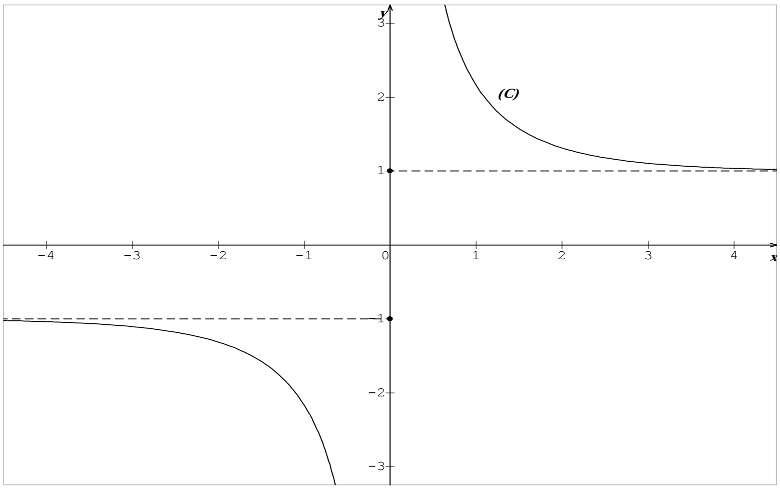
الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)



الشكل (5)

الجواب :

معتمدا على قراءة بيانية

بالنسبة للشكل (1)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1, \lim_{x\to+\infty} f(x)=-1, \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty, \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=+\infty$$

بالنسبة للشكل (2)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

بالنسبة للشكل (3)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty, \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

بالنسبة للشكل (4)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1, \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty, \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$$

بالنسبة للشكل (5) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1, \lim_{x\to+\infty} f(x)=1, \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=-\infty, \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$

التمرين 05 :

المستوي منسوب إلى معلم $(0,I,J)$ و (C) المنحني الممثل لدالة f

1 أثبت أن المستقيم (d) هو مقارب شاقولي للمنحني (C) في كل حالة من الحالات التالية:

الدالة f معرفة بالدستور:	معادلة للمستقيم (d) هي:
1) $f(x)=\frac{5x+3}{2x+1}$	$x=-\frac{1}{2}$
2) $f(x)=\frac{3x^2+8x-2}{x^2-2x+1}$	$x=1$
3) $f(x)=\frac{3x+5}{x^2-2}$	$x=-\sqrt{2}$

2 أثبت أم المستقيم (D) هو مقارب أفقي للمنحني (C) بجوار $+\infty$ وكذلك بجوار $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

الدالة f معرفة بالدستور:	معادلة للمستقيم (D) هي:
$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{2x^2+5x+5}$	$y=\frac{1}{2}$
$f(x)=\frac{3x+2}{x^2+1}$	$y=0$
$f(x)=\frac{7x+8}{-3x+2}$	$y=-\frac{7}{3}$

3 أثبت أن المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$ وكذلك بجوار $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

الدالة f معرفة	$f(x)=5x+1-\frac{2}{x-5}$	$f(x)=-x+\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{3}{x}$
معادلة للمستقيم (Δ)	$y=5x+1$	$y=-x$	$y=\frac{1}{2}x+1$

الجواب :

بالنسبة للحالة 1 :

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x<-\frac{1}{2}}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$ و منه المستقيم (d) حيث معادلة له $x = -\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب شاقولي للمنحني (C)

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين .

بالنسبة للحالة الثانية

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ و منه (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي (D) معادلة له $y = \frac{1}{2}$

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين

بالنسبة للحالة الثالثة

$$f(x) = 5x + 1 - \frac{2}{x-5}$$

لدينا: $f(x) - (5x+1) = -\frac{2}{x-5}$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-5) = +\infty$

منه: $\lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{2}{x-5} = 0$ منه: $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(f(x) - (5x+1)\right) = 0$ وعليه (C) المنحني الممثل للدالة f بالنسبة إلى معلم $\left(0, I, J\right)$ يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلة له: $y = 5x + 1$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

بنفس الكيفية نتعامل مع الحالتين الباقيتين

التمرين 06 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بالدستور: $f(x)=\frac{3x^2-11x+13}{x-2}$

1) عين المجموعة D مجموعة تعريف الدالة f ثم أثبت أنه من أجل كل عنصر x من D يكون: $f(x)=3x-5+\frac{3}{x-2}$

2) أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$

3) أحسب $f(x)$ بدلالة x $(x\in D$ و f' الدالة المشتقة للدالة f)

ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f

4) أنشيء جدول تغيرات الدالة f

5) نسمي (C) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(0,I,J)$

أ- أثبت أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (Δ) يطلب تعيين معادلة لكل واحد منهما.

ب- أثبت أن نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) هي مركز تناظر للمنحني (C)

ت- أكتب معادلة للمستقيم (d) المماس للمنحني (C) في نقطته A ذات الفاصلة (-1)

ث- أنشيء بإتقان المستقيمات: (D)،(Δ)، (d) والمنحنى (C)

أنشيء المنحني (C') الممثل للدالة g المعرفة بالدستور: $g(x)=\frac{3x^2-11x+13}{|x-2|}$

الجواب :

$$f(x)=\frac{3x^2-11x+13}{x-2}$$

1/ D هي مجموعة تعريف الدالة f

لنا x عدد حقيقي كيفي وعليه:

$(x \in D)$ يكافئ $(x-2 \neq 0)$

ومنه: $D = R - \{2\}$

لنثبت أن: $f(x) = 3x - 5 + \frac{3}{x-2}$ من أجل x عنصرا من D

ليكن x عنصرا كيفيا من D لنا

$$f(x) = 3x - 5 + \frac{3}{x-2}$$

$$= \frac{(3x-5)(x-2)+3}{x-2}$$

$$= \frac{3x^2 - 11x + 13}{x-2}$$

ومنه: $f(x) = 3x - 5 + \frac{3}{x-2}$

/2

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3x - 5 + \frac{3}{x-2}$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3x - 5 + \frac{3}{x-2}$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} 3x - 5 + \frac{3}{x-2}$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} 3x - 5 + \frac{3}{x-2}$$
$$= +\infty$$

ليكن x عنصرا كيفيا من D:

$$f'(x) = \frac{(6x-11)(x-2) - (3x^2 - 11x + 13)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 12x + 9}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 12x + 9}{(x-2)^2}$$

دراسة إتجاه تغير الدالة f

من أجل x عنصرا كيفيا من D لنعين إشارة $f'(x)$

لما $(x \in D)$ لنا $(x-2 \neq 0)$ ومنه $(x-2)^2 > 0$

وعليه إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $3x^2-12x+9$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
إشارة $3x^2-12x+9$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

لما $x \in]-\infty,1] \cup [3,+\infty[$ لنا f دالة متزايدة تماما

لما $x \in]1,3[-\{2\}$ لنا f دالة متناقصة تماما

4/ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

5/ أ- أثبت أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين، (D) و (Δ)

$\left(\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty, \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty\right)$ يعني (C) يقبل مستقيم مقارب عمودي (D) معادلة له: $x=2$

$\begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(3x-5)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(3x-5)=0 \end{pmatrix}$ يعني (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلة له: $y=3x-5$

ب- نقطة تقاطع (D) و (Δ) هي $B(2,1)$ وعليه:

$B(2,1)$ مركز تناظر لـــ (C) يكافئ (من أجل كل x من D لنا $(4-x)\in D$ و $f(4-x)+f(x)=2$)

$(x\in D)$ يكافئ $(x\neq 2)$

يكافئ $(-x\neq -2)$

يكافئ $(4-x\neq 4-2)$

يكافئ $(4-x\neq 2)$

يكافئ $((4-x)\in D)$

و

$$\begin{aligned} f(4-x)+f(x) &= 3(4-x)-5+\frac{3}{4-x-2}+3x-5+\frac{3}{x-2} \\ &= 12+\frac{3}{2-x}+\frac{3}{x-2}-10 \\ &= 2 \end{aligned}$$

إذا: $f(4-x)+f(x)=2$

ومنه: $B(2,1)$ مركز تناظر لـــ (C)

ت- معادلة لـــ (d) الماس لـــ(C) عند النقطة A ذات الفاصلة -1 هي:

$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ مع: $f'(-1)=\dfrac{8}{3}$

$f(-1)=-9$

أي: $y=\dfrac{8}{3}(x+1)-9$

أي: $y=\dfrac{8}{3}x-\dfrac{19}{3}$