سلسلة تطبيقات نموذجية

(ملخص الدرس + تمارين تطبيقية + فروض وامتحانات تدريبية)

المستوى: 3 علوم تجريبية إعداد الأستاذ: بن الشيخ عبد الكريم (تقرت-ورقلة)

الدرس 1: النهايات و الإستمرار

ملخص درس النهايات

العمليات على النهايات			حالات عدم التعيين
$+\infty+a=+\infty$ $-\infty+a=-\infty$ $+\infty+\infty=+\infty$ $-\infty-\infty=-\infty$	$(a\neq 0)$ $a\times\infty=\infty$ $\infty\times\infty=\infty$	$\frac{a}{\infty}=0$ $\quad\frac{\infty}{a}=\infty$ $\frac{a}{0}=\infty$ $\quad(a\neq 0)$	$\frac{0}{0}$ $\quad\frac{\infty}{\infty}$ $\quad 0\times\infty$ $\quad\infty-\infty$

التفسير الهندسي للنهاية	• $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ معناه المستقيم $y=l$ مستقيم مقارب ل (C_f) عند ∞ • $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ معناه المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مستقيم مقارب ل (C_f) • $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ معناه احتمال وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند
المستقيم المقارب المائل	• $y=ax+b$ (Δ) مستقيم مقارب ل (C_f) عند ∞ يعني $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ • إذا $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ يعني $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f) عند ∞ • لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى $(D):y=ax+b$ ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-(ax+b)\right]$

نهاية دالة مركبة	$f=v\circ u$ إذا $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to b}v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$	
النهايات و الترتيب	إذا $g(x)\le f(x)\le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$	
	إذا $f(x)\ge g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	إذا $f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

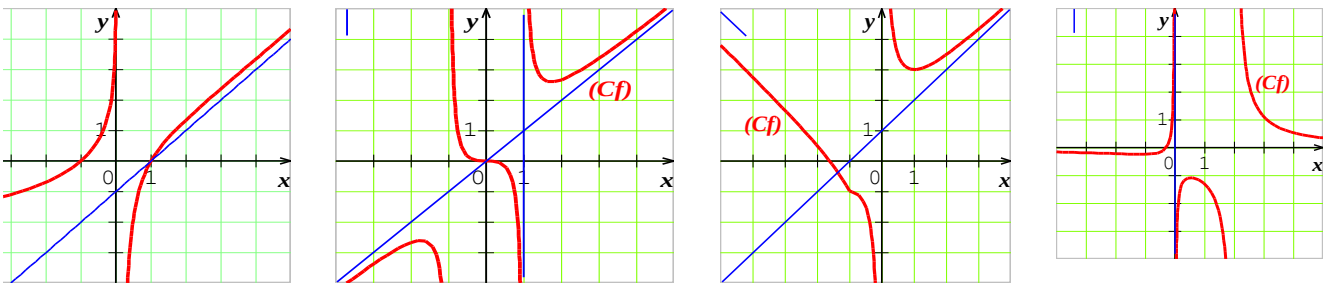
التمرين 01 (تذكير والتدرب على حساب النهاية)

①ادرس نهاية الدالة f ، إذا كانت f غير معرفة عند a ادرس النهاية على يمين و على يسار a

1	$f(x)=2x^3-x+1$ عند $-\infty$ ، $+\infty$	6	$f(x)=\frac{x+1}{(x-2)^2}$ عند $-\infty$ ،عند $+\infty$ ، عند 2
2	$f(x)=-3x^4+2x+4$ عند $-\infty$ ، $+\infty$	7	$f(x)=2x-1+\frac{3}{x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، 0
3	$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ عند $-\infty$ ،عند $+\infty$ ، عند -1	8	$f(x)=x^2+x-\frac{1}{x-3}$ عند $-\infty$ ،عند $+\infty$ ،عند 3

التمرين 02 (تخمين النهاية)

في كل حالة من الحالات الثلاث خمّن النهايات في أطراف مجموعة التعريف D و أعط معادلة لكل مستقيم مقارب لمنحني C_f الدالة f .



2 -لتكن الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		0	$-$		$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	1

1) عين مجموعة تعريف الدالة f والنهايات عند حدود مجموعة التعريف .

3) أعط معادلة لكل مستقيم مقارب لمنحني الدالة f .

4) في معلم متعامد ومتجانس , ارسم تمثيل بياني C_f للدالة f وأيضا المستقيمات المقاربة لـ C_f

التمرين 03 (حساب نهاية)

أحسب النهايات التالية

حساب نهاية دالة مركبة	حساب النهاية لدوال جدرية	حساب النهاية باستعمال العدد المشتق
• $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{2x-4}}$	• $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$	• $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
• $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-x+3}$	• $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x+2$	• $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$
• $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)$	• $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}-2x+1$	• $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$
	• $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}$ عند $+\infty$	

التمرين 04 (حساب النهاية باستعمال المقارنة)

①نعتبر الدالة f المعرفة على R^* ب $f(x)=1+\frac{\cos x}{x^2}$

1. بين أنه من أجل كل x من R^* ، $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le1+\frac{1}{x^2}$. أستنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

②نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ $f(x)=\frac{x}{2+\sin x}$

1. بين أنه من أجل كل x من R ، $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le1$ استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

التمرين 05 (حساب النهاية باستعمال طرق أخرى)

بين باستعمال طريقة مناسبة أن :

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=-3$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=2\sqrt{2}$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=2$

التمرين 06 (التفسر الهندسي للنهايات)

فسر هندسيا النهايات التالية

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to3}f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-x=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-2x=1$