

الحل النموذجي لاختبار البكالوريا التجريبية دورة 2013

إعداد الأستاذ: بالعبيدي م العربي

الموضوع الثاني

المادة: الرياضيات

3-أ) البرهان أن (v_n) م.هـ و تعيين أساسها وحدها الأول

(v_n) م.هندسية معناه $v_{n+1} = q.v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = \frac{u_n + 4n + 4}{3} - 2n - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 2n + 1}{3} = \frac{(v_n + 2n - 1) - 2n + 1}{3} = \frac{1}{3}v_n$$

أي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2(0) + 1 = 4$

ب) استنتاج أن $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

لدينا: $v_n = u_n - 2n + 1$ ومنه $u_n = v_n + 2n - 1$

ومنه $u_n = v_0.q^n + 2n - 1 = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

ج) حساب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right]$$

$$= 4 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \right] \quad \text{لدينا:}$$

$$= 6 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right)$$

استنتاج بدلالة n المجموع T_n

$$T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

ولدينا: $u_n = v_n + 2n - 1$ وعليه يكون T_n كمايلي:

$$T_n = (v_0 + 2(0) - 1) + (v_1 + 2(1) - 1) + \dots + (v_n + 2(n) - 1)$$

$$T_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 2(0 + 1 + \dots + n) - 1(n + 1)$$

$$T_n = S_n + 2 \frac{(n+1)(0+n)}{2} - 1(n+1)$$

$$T_n = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) + n^2 - 1 \quad \text{وأخيرا}$$

التمرين الأول: (4.5 نقط)

1) حساب u_1, u_2, u_3

لدينا: $u_0 = 3$ و $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$

$$u_1 = \frac{u_0 + 4(0) + 4}{3} = \frac{7}{3} \quad \text{ومنه:}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + 4(1) + 4}{3} = \frac{31}{9}$$

$$u_3 = \frac{u_2 + 4(2) + 4}{3} = \frac{139}{27}$$

2- أ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n > 0$

*التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $u_0 > 0$ محققة لأن $u_0 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

لدينا: $u_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ومنه: $u_n + 4n > 4n$

ومنه $u_n + 4n + 4 > 4n + 4$ ومنه:

$$u_{n+1} > 0 \quad \text{أذن} \quad \frac{u_n + 4n + 4}{3} > \frac{4n + 4}{3} > 0$$

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1, u_n > \frac{4}{3}n$

لدينا $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$ معناه $3u_n = u_{n-1} + 4(n-1) + 4$

معناه $3u_n = u_{n-1} + 4n$

معناه $u_{n-1} = 3u_n - 4n$

ومنه $3u_n - 4n > 0$ لأن $u_{n-1} > 0$ ($n \geq 1$)

إذن $u_n > \frac{4}{3}n$ و هو المطلوب.

ج) استنتاج نهاية المتتالية (u_n) .

لدينا مما سبق أن $u_n > \frac{4}{3}n$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3}n = +\infty$

لكن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3}n = +\infty$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

وذلك حسب مبرهنة الحد من الأسفل

التمرين الثاني : (4.5 نقط)

1) كتابة معادلة لسطح الكرة $S(A, AB)$

(S) هي مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث $MA^2 = AB$

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 + (0+2)^2$$

أي معادلة (S) هي: $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2 = 9$

2- بيان أن (Δ) مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه

$$\vec{u}(-2; -1; 1) \text{ ويشمل النقطة } B$$

نضع: $z = t$ حيث وسيط حقيقي

$$\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases} \text{ لدينا: } \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \text{ ومنه}$$

الجملة تعني ان (Δ) هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من

الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2; -1; 1)$ ويشمل النقطة B.

3- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P)

(P) يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (Δ) .

لدينا: $A \in (P)$ و $\vec{u}(-2; -1; 1)$ شعاع ناظمي له

ومن معادلة (P) هي من الشكل: $-2x - y + z + d = 0$

$A \in (P)$ معناه $d = 2x_A + y_A - z_A = 4$

ومن معادلة (P) له معادلة من الشكل: $-2x - y + z + 4 = 0$

4. أتعين إحداثيات نقطة تقاطع (P) و (Δ) .

إحداثيات نقطة تقاطع (P) و (Δ) هي حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = t \\ -2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ومن: } t = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } -2(-2t+3) - (-t+1) + t + 4 = 0$$

$$\text{وعليه: } x = 2, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$$

ومن: إحداثيات نقطة تقاطع (P) و (Δ) هي $H(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

ب- حساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هي الطول AH

لأن (P) يعامد (Δ) في النقطة H

$$d(A; \Delta) = AH = \sqrt{(1-2)^2 + (0-\frac{1}{2})^2 + (2+\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

ج - استنتاج أن (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين

(Δ) يقطع (S) في نقطتين لأن $d(A; \Delta) < R$

$$5- \text{ تبيان أن: } \vec{BG} = \frac{1}{1+e^t} \vec{BC}$$

لدينا: G مرجح الجملة $\{(C; 1), (B; e^t)\}$

ومن G تحقق العلاقة الشعاعية (1) $\vec{GC} + e^t \vec{GB} = \vec{0}$

$$(1) \text{ تكافئ } \vec{GB} + \vec{BC} + e^t \vec{GB} = \vec{0}$$

$$\text{تكافئ } \vec{BG} = \frac{1}{1+e^t} \vec{BC}$$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة f

$$\text{لدينا: } f(t) = \frac{1}{1+e^t} \text{ حيث } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{لدينا: } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 \text{ و } \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 1$$

$$\text{ولدينا: } f'(t) = \frac{-e^t}{(1+e^t)^2} < 0 \text{ ومنه } f \text{ متناقصة تماما}$$

جدول تغيرات الدالة f

t	$-\infty$	$+\infty$
f'(t)		-
f(t)	1	0

- استنتاج مجموعة النقط G

$$\text{من العلاقة الشعاعية } \vec{BG} = \frac{1}{1+e^t} \vec{BC} \text{ نستنتج ان}$$

مجموعة النقط G هي المستقيم الذي يشمل النقطة B

ويوازي المستقيم (BC) عندما يسمح t المجموعة $\mathbb{R}$

حسب جدول التغيرات $t \in \mathbb{R}$ فإن $f(t) \in]0; 1[$

وعليه مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$ هي

القطعة [BC] باستثناء النقطتين B و C.

التمرين الثالث (04 نقط)

1- أكتب z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي.

$$\text{لدينا: } z_A = -2i = 2(0 - 1i) = 2e^{\frac{\pi_i}{2}}$$

$$z_B = -\sqrt{3} + i = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2e^{\frac{5\pi_i}{6}}$$

$$z_C = \sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2e^{\frac{\pi_i}{6}}$$

ب) استنتاج مركز ونصف قطر الدائرة (C)

لدينا: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ ومنه النقط A, B, C

تنتمي لدائرة واحدة مركزها O ونصف قطرها 2

التمرين الرابع (07نقط)

تشكيل جدول تغيرات g بقراءة بيانية .

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		+ 0 -		+
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ -1 $\searrow$	$-\infty$	$+\infty$

(1) تبيان ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

الدالة g متزايدة ومستمرة على المجال $]0; +\infty[$
 $g(1,07) \times g(1,09) < 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم
 المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث:
 $1,07 < \alpha < 1,09$ يحقق: $g(\alpha) = 0$.

(2) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}^*$.

مما سبق نستنتج إشارة ان $g(x)$ تكون كما يلي.

$x \in]-\infty; \alpha[$ معناه $g(x) \in]-\infty; 0[$ أي $g(x) < 0$
 $x \in]\alpha; +\infty[$ معناه $g(x) \in]0; +\infty[$ أي $g(x) > 0$
 (1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم

تفسير النتيجة الأخيرة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} (-3 \frac{\ln|x|}{x^2}) = +\infty$$

إذن (C_f) يقبل مستقيم كمقارب عمودي معادلته $x = 0$

$$2. \text{ أ- تبيان انه من } x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{x^4}$$

$$f'(x) = 2 - 3 \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln|x|}{x^4} = \frac{2x^4 - 3x(1 - 2 \cdot \ln|x|)}{x^4}$$

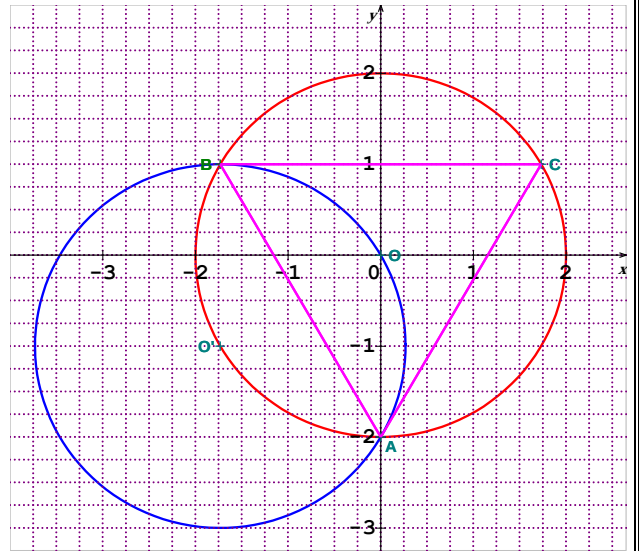
$$= \frac{x(2x^3 - 3 + 6 \ln|x|)}{x^4} = \frac{x \cdot g(x)}{x^4}$$

ب- استنتاج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات $f(x)$

نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $x \cdot g(x)$
 وهي حسب الجدول التالي

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	-	+	0	+
$g(x)$	-	-	+	+
$f'(x)$	+	-	+	+

(ج) تعليم النقط A, B, C ، ثم رسم الدائرة (C)



2-أ) كتابة $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري ثم الأسّي

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

بعد ضرب حدي الكسر في مرافق المقام نجد النتيجة

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ من الجواب السابق لدينا: } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \text{ ومنه: } AB = AC$$

نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3-أ) تبيان أن صورة النقطة O بالدوران r

العبارة المركبة للدوران $r(A; \frac{\pi}{3})$ هي :

$$a = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ حيث: } z' = az + (1-a)z_A$$

ومنه:

$$z_{O'} = az_O + (1-a)z_A = (1-a)z_A = -\sqrt{3} - i$$

(ج) تبيان أن $[O'C]$ قطرا للدائرة (C)

$$O'C = |z_C - z_{O'}| = |2\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{16} = 4$$

(ج) التحقق أن (C) و (C') تشتركان في النقطتين A و B

يكفي التحقق من أن النقطتين A و B تنميان للدائرة (C')

$$\text{لدينا: } O'A = |z_A - z_{O'}| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{4} = 2$$

$$O'B = |z_B - z_{O'}| = |-\sqrt{3} - i| = \sqrt{4} = 2$$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

جتيان ان $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$ واستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا: $f(\alpha) = 2\alpha - 3 \frac{\ln|\alpha|}{\alpha^2}$

$\ln|\alpha| = -\frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}2\alpha^3 - 3 + 6\ln|\alpha| = 0$ معناه $g(\alpha) = 0$

ومنه: $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{3}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2} \right) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$

حصرا $f(\alpha)$ نضع: (1) $1,07 < \alpha < 1,09$

(1) تكافئ (2) $3,21 < 3\alpha < 3,27$

(1) تكافئ $1,144 < \alpha^2 < 1,188$ تكافئ $2,28 < 2\alpha^2 < 2,36$

تكافئ (3) $\frac{3}{2,36} < \frac{3}{2\alpha^2} < \frac{3}{2,28}$

من (2) و (3) نجد: $3,21 - \frac{3}{2,28} < 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2} < 3,27 - \frac{3}{2,36}$

وأخيرا $1,92 < f(\alpha) < 2,01$

3. أ- بيان ان (D) $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f)

لدينا: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 3 \frac{\ln|x|}{x^2} = 0$

ومنه (C_f) يقبل المستقيم (D) كمقارب مائل في جوار $\pm\infty$

ب- ادرس وضعية لـ (C_f) بالنسبة الى المستقيم (D)

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = -3 \frac{\ln|x|}{x^2}$

$f(x) - y = 0$ معناه $\ln|x| = 0$ معناه $|x| = 1$ معناه $x = \pm 1$

$f(x) - y < 0$ معناه $\ln|x| > 0$ معناه $|x| > 1$ أي $x > 1$ أو $x < -1$

$f(x) - y > 0$ معناه $\ln|x| < 0$ معناه $|x| < 1$ أي $-1 < x < 1$

ومنه وضعية (C_f) بالنسبة الى (D) تكون كمايلي:

(1) $x = \pm 1$ معناه (C_f) يقطع (D) في نقطتين

(2) $x < -1$ أو $x > 1$ معناه (C_f) تحت (D)

(3) $\{0\} - 1 < x < 1$ معناه (C_f) فوق (D)

4. أبيان وجود مماس (Δ) لـ (C_f) يوازي (D) ويمس

(C_f) في نقطتين. يطلب اعطاء معادلة لهذا المماس.

نبين أن المعادلة $f'(x_0) = 2$ تقبل حلين متميزين

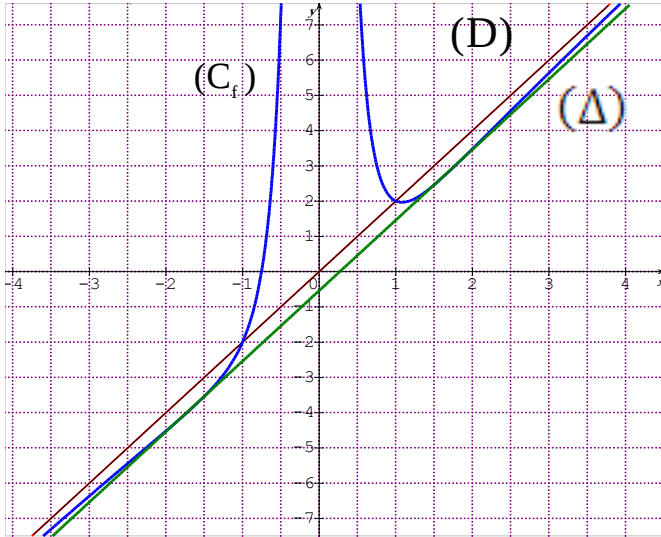
$f'(x_0) = 2$ معناه $\frac{x_0 \cdot g(x_0)}{x_0^4} = 2$ معناه $-3 + 6\ln|x_0| = 0$

$-3 + 6\ln|x_0| = 0$ معناه $x_0 = -\sqrt{e}$ أو $x_0 = \sqrt{e}$

اعطاء معادلة لهذا المماس

$(\Delta): y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e}) = 2x - \frac{3}{2e}$

ب- إنشاء (Δ) و (D) و (C_f) .



5. أ- تعيين عدد وإشارة حلول المعادلة: $mx^2 + 3\ln x = 0$

(*) $m = -\frac{3\ln x}{x^2}$ تكافئ $mx^2 + 3\ln x = 0$

(*) تكافئ $x + m = f(x)$ تكافئ $y = x + m$ و $y = f(x)$

وعليه حلول المعادلة (*) هي فواصل نقط تقاطع (C_f)

والمستقيم ذو المعادلة $y = x + m$ له نفس المنحنى مع (Δ)

من البيان نميز الحالات التالية

(1) $m < -1,5e^{-1}$ المعادلة لا تقبل حلول.

(2) $m = -1,5e^{-1}$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

(3) $-2 < m < -1,5e^{-1}$ المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب

(4) $m \geq -2$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

ب- تعيين العددين الحقيقيين a ، b

دالة أصلية للدالة $h(x) = \frac{\ln|x|}{x^2}$ معناه $x \mapsto \frac{\ln|x|}{x^2}$

ومنه $a = b = -1$ ومنه $\frac{b - a - b \ln|x|}{x^2} = \frac{\ln|x|}{x^2}$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

نسمي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

$F(x) = x^2 - 3h(x) + c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

إعداد الأستاذ: بالعبيدي م العربي