الموضوع الثاني

تمرين 01 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1=-1$ و بالعلاقة التراجعية :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=\dfrac{n.u_n+3n+6}{2n+2}$ ،

1-أ) برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بـ 3 .

ب) برهن أن : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+2}{2n+2}(3-u_n)$ ، ثم أثبت أن : (u_n) متزايدة تماما .

ج) استنتج أن (u_n) متقاربة .

2- (v_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $v_n=n.(3-u_n)$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$.

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n. برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة ؟

ج) نضع : $p_n=v_1\times v_2\times v_3\times ....v_n\times v_{n+1}$

أثبت أن : $P_n=\sqrt{2^{(4-n)(1+n)}}$

تمرين 02 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O.\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$x-y+z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يمس سطح الكرة (S) ذات المركز $w(1;-1;3)$.

1) جد نصف قطر سطح الكرة (S). ثم أستنتج معادلة ديكارتية لـ (S).

2) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة w و يعامد المستوي (P) .

3) لتكن النقطة H نقطة تماس (S) والمستوي (P) ،

عين إحداثيات النقطة H .

4) عين إحداثيات النقط المشتركة بين (S) و حامل محور الفواصل .

5/ (p_1) و (p_2) مستويان معادلتيهما على الترتيب :

$x-y-2z-3=0$ و $2x+y-z-2=0$.

جد معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقطة $B(3,-6,2)$ و العمودي على كل من المستويين (p_1) و (p_2).

تمرين03 :

1) جد العددين المركبين z_1 و z_2 علما أن : $\begin{cases} Im(z_1) = Im(z_2) \\ Re(z_2) = 3 + Re(z_1) \\ z_1 + z_1 = 1 + 2i \end{cases}$

Re ترمز للجزء الحقيقي و Im ترمز للجزء التخيلي

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ الوحدة : $1cm$

A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب : $z_A = 2z_B$ ، $z_B = -1+i$ ، $z_C = 2+i$

أ) أكتب z_B على الشكل الأسي ، ثم برهن أن $z_A^{\ 2014}$ تخيلي صرف .

ب) أكتب $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الجبري ، ثم استنتج قيسا للزاوية الموجهة : $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

ج) برهن أن مساحة المثلث ABC تساوي $\dfrac{3}{2}cm^2$.

3) أ) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة : $\left\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\right\}$

ب) عين (Δ) مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث : $\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$

تمرين04 :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

و (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أ) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون :

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x+1+\dfrac{\alpha e^x}{e^x+1}$ و $f(x) = x-1+\dfrac{\beta}{e^x+1}$

ب) جد نهايات الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

جـ) بين أن المستقيمين $(\Delta_1),(\Delta_2)$ الذين معادلتيهما على الترتيب :

$y = x+1$ و $y = x-1$ مستقيمان مقاربان مائلان لـ (C) .

د) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى كل من $(\Delta_1),(\Delta_2)$

2. أ) بين أن الدالة f فردية .

ب) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

جـ) جد معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

د) أنشئ $(\Delta_1),(\Delta_2)$, المماس ثم المنحني (C)

3. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m إشارة و عدد حلول المعادلة : $\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = -m$

4. عين الدالة الأصلية F للدالة f و التي تحقق $F(0) = -\ln 2$

1 -إيجاد نصف قطر سطح الكرة

المسافة بين المركز و المستوى : $R\, d(\varpi,(p)) = 2\sqrt{3}$

-استنتاج معادلة ديكارتية لسطح الكرة (s) :

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=12$.

2 -إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة w والعمودي على (p)

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظم للمستوي (p) يمثل شعاع توجيه المستقيم $(d)\begin{cases}x=1+t\\y=-1+t\\z=3+t\end{cases}$ حيث: $t\in\Re$

3 -تعيين إحداثيات النقطة H نفطة تماس(s) والمستوي (p)

$H(3,\quad -3,\quad 5)$

4-تعيين إحداثيات النقط المشتركة بين (s) وحامل محور الفواصل

$\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$ حيث : $t\in\Re$:التمثيل الوسيطي لحامل محور الفواصل

$M(x,\quad y,\quad z)\in(s)\cap(x'x)$ معناه $(t-1)^2+1+9=12$ أي: $(t-1)^2=2$ ومنه : $t=1+\sqrt{2}$ أو $t=1-\sqrt{2}$

$(s)\cap(x'x)=\left\{A_1\left(1+\sqrt{2},\quad 0,\quad 0\right),A_2\left(1-\sqrt{2},\quad 0\quad 0\right)\right\}$

5-إيجاد معادلة المستوي الذي يشمل النقطة $B(3,-6,2)$ والعمودي على كل من $(P1)$ و $(P2)$

معادلة هذا المستوي هي من الشكل: $a(x-3)+b(y+6)+c(z-2)=0$:

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظم للمستوي (Π) ولدينا : (Π)عمودي على كل من $(P1)$و$(P2)$ أي : $\vec{n}$ عمودي على كل من

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ و $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ حيث: $\vec{n_1}$ شعاع ناظم للمستوي$(P1)$ و $\vec{n_2}$ شعاع ناظم للمستوي $(P2)$.

إذا $x-y+z-11=0$ هي معادلة ديكارتية المستوي(p)

حل التمرين الأول :

$$f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

1. أ) التحقق من أن: $f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$ و $f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1}$

من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1}=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

ب) النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{2}{e^x+1}\right)=+\infty$$

جـ) المستقيمات المقاربة المائلة :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=0 \text{ ،}$$

و منه: $y=x+1$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^x+1}\right)=0$$

و منه: $y=x-1$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$

نضع : $(\Delta_1): y=x+1$ ، $(\Delta_2): y=x-1$

د) دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ_1)

$$f(x)-(x+1)=-\frac{2e^x}{e^x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-(x+1)=-\frac{2e^x}{e^x+1}\prec 0$

ومنه المنحنى (C) يقع تحت (Δ_1).

دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ_2)

$$f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x+1}\succ 0$

ومنه المنحنى (C) يقع فوق (Δ_2) .

2- أ) بيان أن الدالة f فردية :

من أحل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $-x\in\mathbb{R}$ و $f(-x)=-x-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-\left(x-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=-f(x)$

ومنه الدالة f فردية .

وبالتالي المنحنى متناظر بالنسبة إلى مبدإ الإحداثيات.

ب) دارسة تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$. الدالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و

$$f'(x)=\frac{1+e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

ومن أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1+e^{2x}}{(e^x+1)^2}\succ 0$

ومنه الدالة متزايدة تماما $[0;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

جـ) إيجاد معادلة لمماس المنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

$$y = x f'(0) + f(0)$$

ومنه $y = \frac{1}{2}x$ معادلة لمماس لمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 (مبدأ الإحداثيات)

د) أنشاء $(\Delta_1),(\Delta_2)$, المماس و المنحني (C)

بما أنّ الدالة فردية فإن تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمبدإ الإحداثيات