الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار واحد من الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول : الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. النقط A ، B وC إحداثياتها على الترتيب : $A(1\,;\,-2\,;\,4)$ ، $B(-2\,;\,-6\,;\,5)$ و $C(-4\,;\,0\,;\,-3)$

1) a) أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

b) بين أن الشعاع $\vec{n}(1\,;\,-1\,;\,-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

c) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) a) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل مبدأ المعلم O وعمودي على المستوي (ABC) .

b) عين إحداثيات النقطة O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) .

3) نرمز بـ H للمسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) وt إلى العدد الحقيقي الذي يحقق : $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$

a) أثبت أن : $t = \dfrac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$

b) استنتج قيمة t ثم إحداثيات النقطة H .

التمرين الثاني :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)z + 1 = 0$

(نرمز بـ z_A للحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_B للحل الثاني)

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (الوحدة : 4 cm)

نرمز بـ A ، B ، C للنقط التي لواحقها على الترتيب z_A ، z_B ، $\boldsymbol{z_C = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}$

a) تحقق أن : $(z_A)^2 = z_C$

b) اكتب z_C على شكله الأسي ثم استنتج الشكل الأسي لـ z_A

c) استنتج أن : $\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ و $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

3) نرمز بـ r للدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O وزاويته $\frac{\pi}{8}$

a) تحقق أن النقطة C صورة النقطة A بالدوران r

b) علم النقط A ، B ، C

4) a) نرمز بـ E إلى صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه O وزاويته $\boldsymbol{-\frac{\pi}{4}}$ ونسبته $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$. تحقق أن $z_E = \frac{1}{2}z_B$

b) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث OBC .

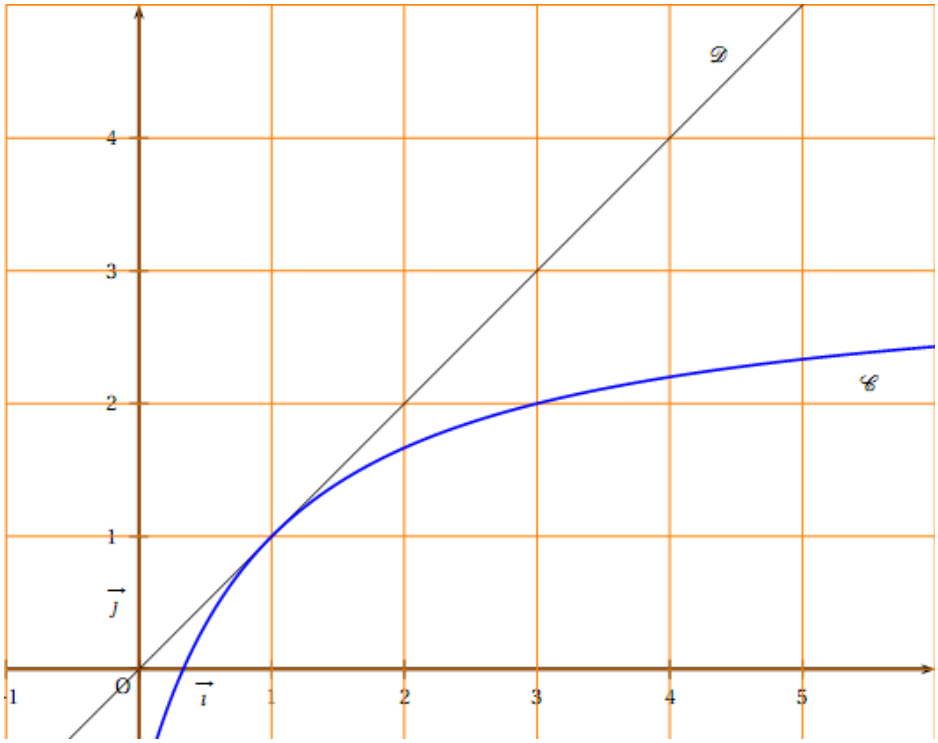
c) تحقق أن $\boldsymbol{\frac{z_G - z_C}{z_E - z_C}}$ حقيقيا . أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1\,;+\infty[$ بـ : $f(x)=3-\dfrac{4}{x+1}$.

نعتبر المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) المنحنى $\mathscr{C}$ الممثل للدالة f و المستقيم $\mathscr{D}$ ذو المعادلة $y=x$ معطى كما يلي :



a) مثل باستعمال ورقة الرسم على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مظهرا خطوط الرسم .

b) ضع تخمينا فيما يتعلق باتجاه تغير المتتالية(u_n) وتقاربها

2) a) برهن باستعمال البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geqslant 1$

b) بين أن الدالة f متزايدة على $]-1\,;+\infty[$. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

c) تأكد من صحة التخمين 1) b) ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع : تعطى المعادلة (E) : $11x-7y=5$ ، حيث x ، y عدد ان صحيحان .

1) a) تحقق أن الثنائية (15 ,10) حلا للمعادلة (E) .

b) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) .

c) عين عدد الثنائيات $(x\,,y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق الشرطين : $0 \leq x \leq 50$ و $0 \leq y \leq 50$

2) نعتبر المعادلة (F) : $11x^2-7y^2=5$ ، حيث x ، y عدد ان صحيحان .

a) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (F) فإن $x^2 \equiv 2y^2[5]$.

b) x ، y عدد ان صحيحان ، انقل على ورقة الاجابة وأكمل الجدولين :

إذا كان x يوافق	0	1	2	3	4	[5]
فإن x^2 يوافق						[5]

إذا كان y يوافق	0	1	2	3	4	[5]
فإن $2y^2$ يوافق						[5]

c) استنتج أنه إذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (F) فإن x و y مضاعفان للعدد 5 .

3) أثبت أنه إذا كان x و y مضاعفان للعدد 5 فإن الثنائية $(x\,,y)$ ليست حلا للمعادلة (F) . ماذا يمكن أن تستنتج بالنسبة للمعادلة (F) ؟

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : حدد صحة أو خطأ كل اقتراح من الاقتراحات المعطاة مع التبرير.

يعطى في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة A(-1 ; -1 , 1) والمستقيمين $\mathscr{D}$ و $\mathscr{D}'$ المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين : $t \in \mathbb{R}$ ، $t' \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{D}\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -3t+2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{و} \quad \mathscr{D}'\begin{cases} x = 3t' \\ y = t'+2 \\ z = 3t'-2 \end{cases}$$

الاقتراح الأول : النقطة A تنتمي إلى المستقيم $\mathscr{D}$

الاقتراح الثاني : المستوي العمودي على $\mathscr{D}$ ويشمل النقطة A معادلته $2x - 3y + z = 0$

الاقتراح الثالث : المستقيمان $\mathscr{D}$ و $\mathscr{D}'$ متعامدان

الاقتراح الرابع : المستقيمان $\mathscr{D}$ و $\mathscr{D}'$ لا ينتميان إلى نفس المستوي .

الاقتراح الخامس : المسافة بين النقطة A والمستوي ذو المعادلة $2x -3y + z =0$ هي $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

التمرين الثاني : المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (الوحدة : 2 cm)

نرمز بـ J للنقطة ذات اللاحقة i .

1) نعتبر النقط A ، B ، C و H لواحقها على الترتيب $a = -3 - i$ ، $b = -2 + 4i$ ، $c = 3 - i$ و $h = -2$.
علم هذه النقط على الرسم .

2) بين أن النقطة J مركز الدائرة $\mathscr{C}$ المحيطة بالمثلث ABC .

3) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{b-c}{h-a}$. استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين .

في بقية التمرين نقبل أن النقطة H هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ABC .

4) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC . عين g لاحقة G ثم علم النقطة G على الرسم .

5) بين أن النقط J ، H و G على استقامة واحدة . تحقق من ذلك على الرسم .

6) نرمز بـ A' إلى منتصف القطعة $[BC]$ وبـ K إلى منتصف القطعة $[AH]$. النقطة A' لاحقتها $a' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

a) عين لاحقة النقطة K .

b) بين أن الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع .

التمرين الثالث : نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

1) احسب u_2 ثم استنتج أن المتتالية (u_n) ليست لاحسابية ولاهندسية .

2) نعرف المتتالية (v_n) كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

a) احسب v_0 .

b) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n .

c) استنتج أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. d) عبر عن v_n بدلالة n .

3) نعرف المتتالية (w_n) كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a) احسب w_0 .

b) باستعمال المساواة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ ، عبر عن w_{n+1} بدلالة u_n و v_n .

c) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = w_n + 2$.

d) عبر عن w_n بدلالة n .

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5) نضع من أجل عدد طبيعي n : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

التمرين الرابع : من أجل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر الدالة f_n المعرفة على IR كمايلي : $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$

نرمز بـ $\mathscr{C}_n$ للمنحنى الممثل للدالة f_n في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس .

الجزء A : دراسة الدالة f_1 المعرفة على IR بـ : $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$.

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$.

2) a) بين أن المنحنى $\mathscr{C}_1$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة لكل منهما .

b) بين أن الدالة f_1 متزايدة تماما على IR .

c) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $0 < f_1(x) < 4$.

3) a) بين أن النقطة I_1 ذات الإحداثيتين $(\ln 7\,;\,2)$ مركز تناظر للمنحنى $\mathscr{C}_1$.

b) عين معادلة للمماس (T_1) للمنحنى $\mathscr{C}_1$ في النقطة I_1

c) أنشئ المماس (T_1) والمنحنى $\mathscr{C}_1$.

الجزء B : دراسة بعض خواص الدالة f_n

1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f_n(x) = f_1(nx)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f_n

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، النقطة $A\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى المنحنى $\mathscr{C}_n$.

3) a) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غيرمعدوم المستقيم الذي معادلته y = 2 يقطع المنحنى $\mathscr{C}_n$ في نقطة واحدة يطلب تحديد فاصلتها . نرمز بـ I_n إلى هذه النقطة

b) عين معادلة للمماس (T_n) للمنحنى $\mathscr{C}_n$ عند النقطة I_n . ثم أنشئ المماس (T_2) و المنحنى $\mathscr{C}_2$

انتـــــهى مع تمنياتنا لكم بالتوفيق

السنة الدراسية : 2011 -2012 — السنوات الثالثة تقني رياضي

تصحيح وسلم تنقيط اختبار الفصل الثالث

الموضوع الأول

التمرين الأول : 4.5

1) a) $\overrightarrow{AB}(-3;-4;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-5;2;-7)$ — 0.5

$(-5)\times(-4) \neq 2\times(-3)$

b)

$\overrightarrow{AB}\times\vec{n} = 1.(-3)+(-1).(-4)+(-1).1 = 0$ — 0.5

و $\overrightarrow{AC}\times\vec{n} = 0$

c) معادلة المستوي (ABC) :

$1(x-1)-1(y+2)-1(z-4)=0$ — 0.5

أي : $x-y-z+1=0$

2) a) تمثيل وسيطي للمستقيم الذي يشمل O وعمودي على المستوي (ABC) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in IR$$ — 0.5

b) إحداثيات O' :

$t+t+t+1=0$ أي $t=-\frac{1}{3}$ — 0.25

ومنه $O'\left(-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ — 0.25

3) a) $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$ تستلزم $\overrightarrow{BH}\times\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BC}$

ومنه $(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH})\times\overrightarrow{BC} = t(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BC})$

وبما أن $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BC}\|^2$ و $\overrightarrow{OH}\times\overrightarrow{BC} = 0$ — 0.5

و $B \neq C$ فإن

$$t = \frac{\overrightarrow{BO}\times\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$$

b) لدينا

$\overrightarrow{BO}(2;6;-5)$ ، $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$ — 0.25

و $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = 4+36+64 = 104$ نستنتج أن :

$t = \frac{2.(-2)+6.6+(-5).(-8)}{104} = \frac{9}{13}$ — 0.5

ومن العلاقة $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$

نستنتج $H\left(\frac{-44}{13}\ ;\ \frac{-24}{13}\ ;\ \frac{-7}{13}\right)$ — 0.5

التمرين الثاني : 6.5

1) حل المعادلة :

$\Delta = 2+\sqrt{2}-4 = \sqrt{2}-2 = i^2(2-\sqrt{2})$ — 0.5

$z_A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; — 0.5

$z_B = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2) a) التحقق أن : $(z_A)^2 = z_C$ — 0.5

b) الشكل الأسي لـ z_C : $z_C = e^{i\frac{\pi}{4}}$ — 0.5

$z_A = e^{\frac{1}{2}\left(i\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{8}}$ — 0.5

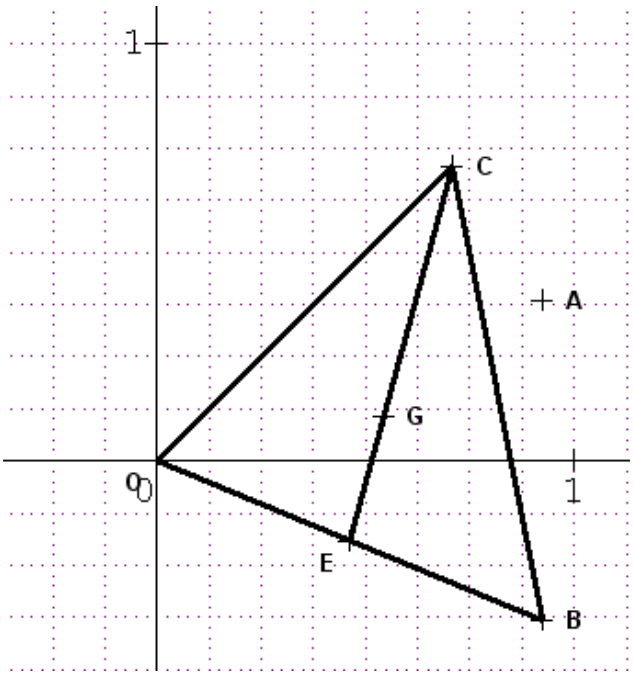
c) من المساواة : $e^{i\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ — 0.5

نستنتج $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

3) a) لدينا $(z_A)^2 = z_C$ ومنه $\frac{z_C}{z_A} = z_A$ — 0.5

أي $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{8}}$ ومنه C صورة A بالدوران r

b)



— 0.5

4) a) E صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\frac{1}{2}$: — 0.5

$z_E = \frac{1}{2}z_A e^{-i\frac{\pi}{4}}$ تكافئ $\frac{z_E}{z_A} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$z_E = \frac{1}{2}z_B$ تكافئ — 0.5

(b

0.5 $z_G = \frac{z_O+z_B+z_C}{3} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{6}$

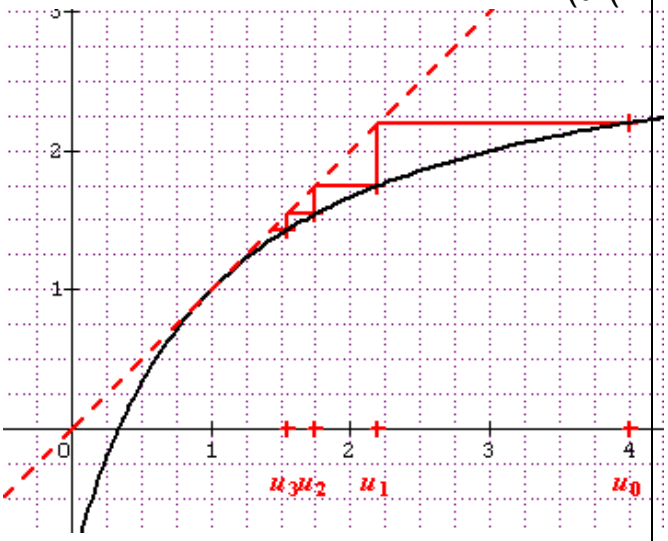
0.5 $\frac{z_G-z_C}{z_E-z_C} = \frac{\frac{z_B+z_C}{3}-z_C}{\frac{1}{2}z_B-z_C} = \frac{\frac{1}{3}(z_B-2z_C)}{\frac{1}{2}(z_B-2z_C)} = \frac{2}{3}$ (c

0.5 تفسير هندسي : $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$

النقط C ، E و G على استقامية .

التمرين الثالث : 4.5

(a (1



0.5 b) التخمين : المتتالية متناقصة ومتقاربة من 1

2) a)البرهان بالتراجع :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$

*التحقق من أجل n = 0 :صحيحة لأن :

$u_0 = 4$ و $4 \geq 0$

* مرحلة الانتقال من الرتبة n إلى الرتبة n+1 :

نفرض $u_n \geq 1$ ونبرهن أن $u_{n+1} \geq 1$

$u_n \geq 1$ تكافئ $u_n + 1 \geq 2$

0.5 تكافئ $\frac{1}{u_n+1} \leq \frac{1}{2}$

تكافئ $-\frac{4}{u_n+1} \geq \frac{-4}{2}$

تكافئ $3 - \frac{4}{u_n+1} \geq 3 + \frac{-4}{2}$

تكافئ $u_{n+1} \geq 1$

0.25 نتيجة : مهما يكن العدد الطبيعي n : $u_n \geq 1$

b) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1 ; +\infty[$

من أجل كل عدد من هذا المجال :

0.5 $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ نستنتج f متزايدة تماما

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq u_n$

نبرهن بالتراجع :

0.25 * الخاصية صحيحة من أجل n = 0

* بمأأن الدالة f متزايدة

0.5 إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$ فإن $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

ومنه $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

0.25 نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq u_n$

c) مما سبق نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة

0.5 ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي حسب النظرية متقاربة .

b) نهاية المتتالية (u_n) هي العدد l حل المعادلة $f(x)=x$

0.5 $f(l)=l$ تكافئ $l^2 - 2l + 1 = 0$ أي $l = 1$.

التمرين الرابع : 4.5

0.25 1) a) التحقق أن (10,15) حلا للمعادلة

0.75 b) مجموعة حلول المعادلة (E) : مجموعة الثنائيات (7k+10 , 11k + 15) حيث k عدد صحيح .

c) عدد الثنائيات حلول المعادلة (E) التي تحقق الشرطين $0 \leq x \leq 50$ و $0 \leq y \leq 50$

0.5 نجد : $-\frac{10}{7} \leq k \leq \frac{40}{7}$ و $-\frac{15}{11} \leq k \leq \frac{35}{11}$

0.25 عدد قيم k : 5 قيم

(2

a) المعادلة (F) تكافئ $11x^2 = 7y^2 + 5$

ومنه : $11x^2 \equiv 7y^2[5]$

0.5 ومنه $x^2 \equiv 2y^2[5]$

(b

إذا كان y يوافق	0	1	2	3	4	[5]
فإن $2y^2$ يوافق	0	2	3	3	2	[5]

0.5

إذا كان x يوافق	0	1	2	3	4	[5]
فإن x^2 يوافق	0	1	4	4	1	[5]

(c

$x^2 \equiv 2y^2[5]$ تعني أن x^2 و $2y^2$ لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على 5 وبقراءة من الجدولين السابقين نستنتج أن x و y مضاعفان للعدد 5 .

3) إذا كان x و y مضاعفان للعدد 5 فإنه يوجد عددان صحيحان k و k' حيث : $x = 5k$ و $y = 5k'$

تكون الثنائية (x ,y) حلا للمعادلة (F) إذا تحقق :

أي $11(5k)^2 - 7(5k')^2 = 5$

$5(11k^2 - 7k'^2) = 1$ اي ان 1 مضاعف لـ 5

وهذا غير صحيح ومنه المعادلة (F) لاتقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

السنة الدراسية : 2011 -2012 — السنوات الثالثة تقني رياضي

تصحيح وسلم تنقيط اختبار الفصل الثالث

الموضوع الثاني

التمرين الأول : 2.5 نقاط

الاقتراح الأول : خاطئ — 0.25

لأن : لايوجد عدد t يحقق في آن واحد : — 0.25

$2t-1=-1$ و $-3t+2=-1$ و $t=1$

الاقتراح الثاني : خاطئ — 0.25

لأن إحداثيات A لاتحقق المعادلة $2x-3y+z=0$ — 0.25

الاقتراح الثالث : خاطئ — 0.25

لأن $\vec{u}(2;-3;1)$ شعاع توجيه $\mathscr{D}$ لا يعامد $\vec{u'}(3;1;3)$ شعاع توجيه $\mathscr{D}'$. فعلا — 0.25

$2.3+(-3).1+3.1\neq 0$

الاقتراح الرابع : صحيح لأن — 0.25

$\vec{u}(2;-3;1)$ شعاع توجيه $\mathscr{D}$ لا يوازي $\vec{u'}(3;1;3)$ شعاع توجيه $\mathscr{D}'$ فعلا :

$2.1\neq(-3).3$

والجملة

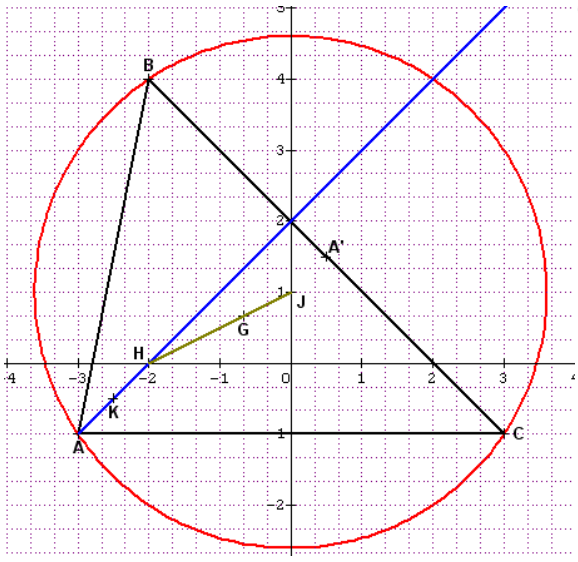
$$\begin{cases} 2t-1=3t' \\ -3t+2=t'+2 \\ t=3t'-2 \end{cases}$$ لاتقبل حلا — 0.25

الاقتراح الخامس : صحيح لأن : — 0.25

$$\frac{|2.(-1)-3(-1)+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

التمرين الثاني : 5

1) — 0.5



2) J مركز الدائرة $\mathscr{C}$ لأن : — 0.75

$$AJ=|i-a|=|3+2i|=\sqrt{13}$$
$$BJ=|i-b|=|2-3i|=\sqrt{13}$$
$$CJ=|i-c|=|-3+2i|=\sqrt{13}$$

3) — 0.5

$$\frac{b-c}{h-a}=\frac{-5+5i}{1+i}=\frac{5i(1+i)}{1+i}=5i$$

نستنتج أن : — 0.5

$$(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{CB})=\arg(5i)=\frac{\pi}{2}$$

ومنه المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين — 0.25

4) g لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC — 0.5

$$g=\frac{a+b+c}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$

5) النقط G ، H ، J على استقامية لأن : — 0.5

$$\frac{i-h}{i-g}=\frac{2+i}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i}=3$$

اي $\overrightarrow{HJ}=3\overrightarrow{GJ}$ — 0.5

6) a) لاحقة K — 0.5

$$z_K=\frac{a+h}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$$

b) الرباعي KHA'J متوازي أضلاع لأن : — 0.5

$\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{A'J}$ أي $z_K-h+z_{A'}-i=0$

التمرين الثالث : 5.75

1) حساب u_2 — 0.25

$$u_2=u_1-\frac{1}{4}u_0=\frac{3}{4}$$

$u_2+u_0\neq 2u_1$ و $u_2\times u_0\neq(u_1)^2$ — 0.5

ومنه المتتالية (u_n) ليست لاحسابية ولا هندسية .

2) a) — 0.25

$$v_0=u_1-\frac{1}{2}u_0=1$$

b)

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}$$
$$=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}u_{n+1}$$ — 0.5

$$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$$

0.25 c) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

d) عبارة v_n بدلالة n :

0.5 $$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3

0.25 a) $$w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$$

0.25 b) $$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$$

c)

0.5 بما أن : $\frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$

نستنتج أن : $w_{n+1} = w_n + 2$

0.25 d) المتتالية (w_n) حسابية أساسها 2 ومنه

$$w_n = w_0 + 2n = 2n - 1$$

(4

$u_n = w_n \times v_n$ تكافئ $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

0.5 ومنه $\mathscr{C}_1$

$$u_n = (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2n-1}{2^n}$$

5) البرهان بالتراجع :

* التحقق من أجل $n = 0$

0.25 $S_0 = u_0 = -1$ و $2 - \frac{2\times 0+3}{2^0} = -1$

* نفرض : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

0.5 نبرهن أن $S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$ = أي

$$S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

0.25 لدينا :

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

$$S_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$$

0.75 $$S_{n+1} = 2 - \frac{2(2n+3)-2n-1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

نتيجة : مهما يكن العدد الطبيعي n :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

التمرين الرابع 6.75

الجزء A :

(1

0.25 $$\frac{4}{1+7e^{-x}} = \frac{4e^x}{e^x(1+7e^{-x})} = f_1(x)$$

(2

0.5 a) $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{1+7e^{-x}} = 4$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته y=4 مقارب للمنحنى C_1 بجوار $+\infty$

0.5 $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4e^x}{e^x+7} = 0$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته y=0 مقارب للمنحنى C_1 بجوار $-\infty$

b) الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على IR ومن أجل كل عدد x من IR :

$$f_1'(x) = \frac{-4(-7e^{-x})}{(1+7e^{-x})^2} = \frac{28e^{-x}}{(1+7e^{-x})^2}$$

0.5 من أجل كل عدد حقيقي x : $f_1'(x) > 0$

نستنتج أن C_1 متزايدة تماما على IR .

0.25 c) لدينا $f_1(]-\infty;+\infty[) =]0;4[$

0. 5 نستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x :

$$0 < f_1(x) < 4$$

(3

a) من أجل كل عدد حقيقي x ، 2ln7-x ينتمي إلى IR و

$$f_1(2ln7 - x) - 4 = \frac{4}{1+7e^{-(2ln7-x)}} - 4$$

$$= \frac{4}{1+\frac{1}{7}e^x} - 4 =$$

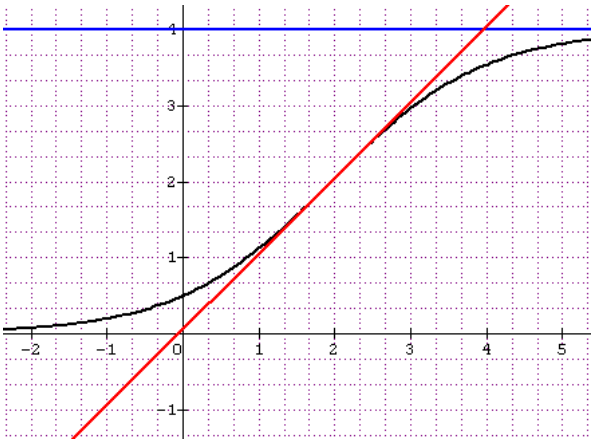
0.5 $$\frac{28}{7+e^x} - 4 = \frac{-4e^x}{e^x+7} = -f_1(x)$$

ومنه $f_1(2ln7 - x) + f_1(x) = 4$

0.75 نستنتج أن النقطة I_1 مركز تناظر للمنحنى C_1

0.5 b) معادلة المماس (T_1) للمنحنى C_1 عند النقطة I_1

c) الرسم



0.5

0. 5

الجزء B :

0. 5

1) $f_n(x) = f_1(nx)$ *
* f_n مركب للدالتين $x \longmapsto nx$ و f_1
المتزايدتين على IR فهي متزايدة على IR .

2) النقطة $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى C_n لأن
$f_n(0) = \frac{1}{2}$

0.25

3)

a) نحل المعادلة $f_n(x) = 2$
$f_n(x) = 2$ تكافئ $e^{nx} = 7$ أي $x = \frac{ln7}{n}$

0. 5

$I_1\left(\frac{ln7}{n}, 2\right)$

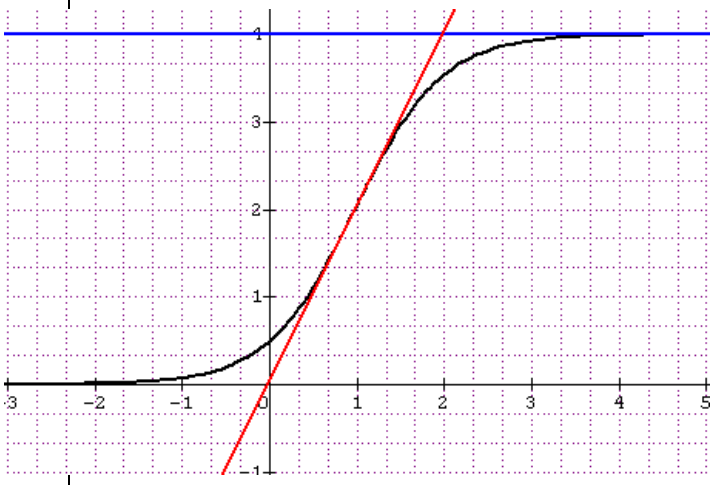
b) معادلة المماس (T_n) عند النقطة I_n

0. 5

$f_n'\left(\frac{ln7}{n}\right) = nf_1'\left(n\frac{ln7}{n}\right) = n$

0. 5

(مشتق الدالة المركبة)



0.5

انتهى التصحيح بفضل الله بتاريخ 8/ 05 / 2012
الاستاذ : ب. حميدي