

المدة : 3 ساعات ونصف

اختبار : مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
{ الموضوع الثاني }

التمرين الأول (4 نقاط)

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; i ; j ; k)$ نعتبر النقط

$$A(0,2,2), B(1,4,3), C(2,-1,4) \text{ و الشعاع } \vec{n}(1,-3,-2)$$

1. عين التمثيل الوسيطى للمستقيم (AB)
2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C و يعامد الشعاع $\vec{n}$
3. عين تقاطع المستقيم (AB) و المستوي (P)
4. ليكن المستوي (Q) ذو المعادلة الديكارتية $x + 2y + z = 0$
 1. بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (Q)
 2. بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان ثم حدد التمثيل الوسيطى لـ (Δ) مستقيم تقاطعهم

التمرين الثاني (4 نقاط)

① نعرف من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ المتتالية (u_n) بـ : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

- أحسب الحدود u_1, u_2, u_3 و u_4
 - أظهرت الآلة النقط الأولى من التمثيل البياني المقابل لهذه المتتالية من خلال ذلك أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب وعبرة الحد العام u_n بدلالة n مع التعليل
1. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2. برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n > n^2$
3. هل (u_n) متقاربة . علل

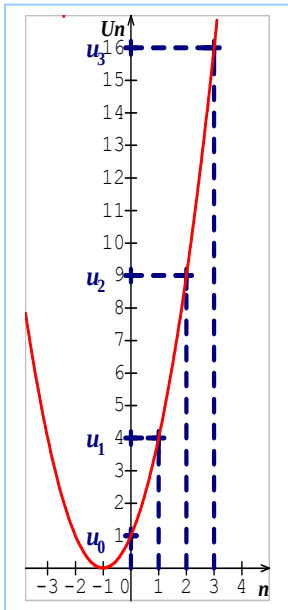
② لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بالعلاقة : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

4. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها 2 و حدها الأول $v_0 = 3$.
- ثم أكتب v_n بدلالة n

5. أحسب المجموع $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ بدلالة n . ثم استنتج u_n

6. برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n = (n+1)^2$

• تأكد من صحة تخمينات



التمرين الثالث (5 نقاط)

- (1) حل في C المعادلة $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$
 (2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; u; v)$. نعتبر النقطتين A و B اللتين

$$z_B = 4\sqrt{3} + 4i \text{ و } z_A = 4\sqrt{3} - 4i$$

1. أكتب كلا z_A و z_B من على الشكل الأسّي
2. أحسب المسافات OA , OB و AB واستنتج طبيعة المثلث OAB
3. نعتبر النقطة C ذات الإحداثيات $z_C = -\sqrt{3} + i$ و لتكن النقطة D صورة C

بالدوران r ذو المركز O والزوايا $-\frac{\pi}{3}$

- عين لاحقة النقطة D
- 4. لتكن G مرجح الجملة $\{(O, -1), (B, 1), (D, 1)\}$
- عين لاحقة النقطة G
- بين أن $\frac{z_C - z_D}{z_G - z_D}$ عدد حقيقي . ماذا تستنتج ؟
- ماهي طبيعة الرباعي $OBGD$

التمرين الرابع (7 نقاط)

① نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x + 2\ln x$.

1. أحسب النهايات ادرس اتجاه تغير الدالة g
2. ضع جدول تغيرات الدالة g .
3. احسب $g(1)$ ثم حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$.
4. استنتج أن : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(\frac{1}{x}) > 0$ و إذا كان $1 < x$ فإن $g(\frac{1}{x}) < 0$

② نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن f دالة مستمرة عند القيمة 0 على اليمين .
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 على اليمين . ما هو التفسير الهندسي للنتيجة المحصل عليها ؟
3. تحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 على اليمين هي $y = x$.
4. بين أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $f(x) > x$

أستنتج الوضع النسبي لنصف المماس (T) و المنحنى (C)

5. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

6. أثبت أن $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$

استنتج اتجاه تغير الدالة f مشكلا جدول تغيراتها

7. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0, +\infty[$ و أن $1 < \alpha < 2$.
8. انشئ المنحنى (C_f) و المماس (T)