

الموضوع الثاني

تمرين 1 : (4 نقاط)

- بين إن كان كل اقتراح من الإقتراحات الخمسة التالية صحيحا أم خاطئا معللا إختيارك .
1. المعادلة ، $14x-6y=1$ ، ذات المجهولين الصحيحين x و y لا تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 .
 2. x عدد صحيح ، إذا كان $x^2 + x \equiv 0[6]$ فإن $x \equiv 0[6]$ أو $x \equiv 2[6]$.
 3. من أجل كل عدد طبيعي n ، العددين $6n^2 + 2n + 1$ و $3n + 1$ أوليان فيمابينهما .
 4. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، العدد الطبيعي N حيث $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13 .
(يمكنك الإستعانة ببواقي القسمة الإقليدية لـ 5^k على 13) .
 5. n عدد طبيعي ، القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين A و B حيث :
 $A = 2n + 8$ و $B = 3n + 8$ هي فقط 2 أو 8 .

تمرين 2 (5 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تعطى النقط $A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ و $C(3;2;4)$.
1. بين أن النقط A ، B و C تعين مستو .

$$2. \text{ ليكن المستقيم } (d) \text{ الذي له تمثيلا وسيطيا التالي}$$

$$\text{حيث } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

- أ) بين أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) .
- ب) أعط معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .
3. لتكن النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (d) مع المستوي (ABC) .
أ) بين أن النقطة H مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; -1), (C; 2)\}$.
ب) عين طبيعة المجموعة (E_1) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :
 $(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot (\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$
ج) عين طبيعة المجموعة (E_2) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :
 $\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$
د) حدد الطبيعة والعناصر المميزة لتقاطع المجموعتين (E_1) و (E_2) .
هـ) هل النقطة $S(-8;1;3)$ تنتمي إلى تقاطع المجموعتين (E_1) و (E_2) ؟

تمرين 3 : (5 نقاط)

- المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (تؤخذ وحدة الرسم $1cm$) .
- نعتبر النقط A_0 ، A_1 و A_2 ذات اللواحق على الترتيب $z_0 = 5 - 4i$ ، $z_1 = -1 - 4i$ و $z_2 = -4 - i$.
- 1) أ) برّر أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث : $S(A_0) = A_1$ و $S(A_1) = A_2$.
 - ب - بين أن الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$.
 - ج - استنتج النسبة ، الزاوية واللاحقة ω للمركز Ω ، للتشابه S .
 - د - نعتبر M و M' نقطتين من المستوي لاحقتيهما Z و Z' على الترتيب حيث $Z \neq \omega$ و $S(M) = M'$.
تحقق من العلاقة $\omega - z' = i(z - z')$. استنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

(2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرّف النقطة A_{n+1} بـ : $A_{n+1} = S(A_n)$ ونضع $u_n = A_n A_{n+1}$.

أ- مثل النقط A_0 ، A_1 و A_2 وأنشئ هندسيا النقط A_3 ، A_4 ، A_5 و A_6 .
 ب- برهن أن المتتالية (u_n) هندسية .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_{n+1}$.

- عبّر عن v_n بدلالة n . هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟

تمرين 4 : (6 نقاط)

جزء أول :

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

يعطى تمثيلها البياني (C_f) في الوثيقة المرفقة . حيث (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $y=0$ و $y=1$.

وأنّ الدالة f متناقصة تماما على \mathbb{R} .

أعط إشارة $f(x)$ حسب قيم x من \mathbb{R} . . .

جزء ثان :

لتكن الدالة F المعرفة على \mathbb{R} بـ : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. أدرس إتجاه تغيرات الدالة F .

2. (أ) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ، $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$. ثمّ أحسب $\int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt$.

(ب) استنتج باستعمال المكاملة بالتجزئة عبارة $F(x)$ بدلالة x .

(ج) تأكد أنّه يمكن كتابة $F(x)$ بالكيفيتين التاليتين :

$$(1) \dots\dots\dots F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2 \ln 2$$

$$(2) \dots\dots\dots F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2 \ln 2$$

3. (أ) عين نهاية $F(x)$ عند $+\infty$.

(ب) عين $\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x) - x]$. أعط تفسيراً بيانياً لهذه النهاية .

(ج) أنشئ في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس المنحني (C_f) المنحني الممثل للدالة F

جزء ثالث :

نعرف في \mathbb{N}^* المتتالية (u_n) بـ : $u_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

1. على المنحني (C_f) الموجود في الوثيقة المرفقة ظلل الجزء من المستوي الذي يكون u_4 (مقدراً بوحدة المساحة) مساحة له .

2. عين إتجاه تغيرات المتتالية (u_n) .

3. (أ) بين أنّه ، من أجل كل عدد حقيقي k حيث $1 \leq k \leq n$ لدينا : $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$

(ب) قارن بين u_n و $F(n)$. هل المتتالية (u_n) متقاربة .

خاص بالتمرين الرابع من الموضوع الثاني

المنحنى الممثل للدالة f حيث $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

