ثـــــــانوية مالك بن نبي عين الدفلى
الإمتحـــــان التجريبي لشهادة البكالوريا دورة ماي 2011
الشعبة : **العلـــــوم التجريبيـــــــــة**

اختبار في مادة : **الرياضيـــــــات** **المدة : 03 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول : (20 نقطة)

تمرين 1 : (5,5 نقاط)

نعتبرالمتتالية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0=-1$ و $u_1=\frac{1}{2}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$

1. أحسب u_2 ثم استنتج أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية .
2. نعرف المتتالية (v_n) كمايلي : من أجل كل عدد عدد طبيعي n ، $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب) عبر عن v_n بدلالة n .

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=\frac{u_n}{v_n}$.

أ) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_{n+1}=w_n+2$. ثمّ عبر عن w_n بدلالة n .

ب) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=u_0+u_1+\cdots u_n$.

برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$

تمرين 2 : (6 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن النقطتين A و B ذواتي اللاحقتين على الترتيب $z_A=2$ و $z_B=3$. يطلب الإنشاء في كل نتائج خطوات التمرين (تؤخذ الوحدة $2cm$) . السؤال 1 مستقل عن السؤالين 2 و 3 .

1. أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+6=0$.

ب) لتكن النقطتين M_1 و M_2 اللتين لاحقتيهما على الترتيب : $z_1=2+i\sqrt{2}$ و $z_2=2-i\sqrt{2}$.

عين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1-3}{z_1}$. استنتج أنّ المثلث OBM_1 قائم .

ج) بين دون إجراء أي حساب أنّ النقط O ، B ، M_1 و M_2 تنتمي إلى نفس الدائرة (c) يطلب تحديدها .

أنشئ الدائرة (c) وضع النقطتين M_1 و M_2 .

2. نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث :

$$z'=z^2-4z+6$$

نرمز بـ (Γ) إلى الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

أ) تحقق من المساواة التالية : $z'-2=(z-2)^2$.

ب) لتكن M نقطة من (Γ).بين أنّ لاحقتها z تحقق $z=2+\sqrt{2}e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi,\pi]$.

ج) بين أنّ $z' = 2 + 2e^{i2\theta}$. استنتج صورة الدائرة (Γ) بالتحويل f .

3 . لتكن النقطة D ذات اللاحقة $z_D = 2 + \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$ ولتكن D' صورتها بالتحويل f .

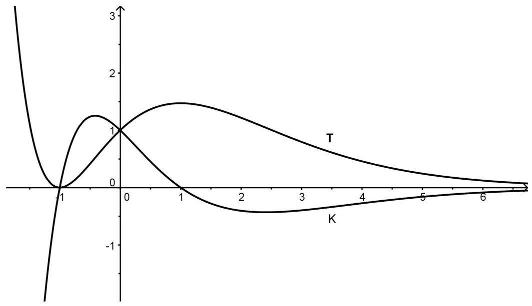
أ) أكتب على الشكل الأسي العدد المركب $z_D - 2$ استنتج أنّ النقطة D تنتمي إلى (Γ) .

ب) باستعمال السؤال 2. ب) أعط قيسا للزاوية $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AD'}\right)$. أنشئ D' على الشكل .

ج) بين أنّ المثلث OAD' متقايس الأضلاع .

تمرين 3 : (8,5 نقاط)

جزء أول :



يعطى في الشكل المقابل المنحنيان T و K لدالتين معرفتين وقابلتين الإشتقاق على $\mathbb{R}$.
نعلم أنّ إحدى هاتين الدالتين الدالة المشتقة للأخرى
نرمز لهما إذا g و g' .

1. أرفق كل دالة منهما بتمثيلها البياني .
على المجال $\left[-\dfrac{3}{2}\,;5\right]$ شكل جدول تغيرات الدالة g .

2. ماهو معامل توجيه المماس للمنحني T في النقطة ذات الفاصلة 0 ؟

جزء ثان :

لتكن المعادلة التفاضلية (E) : $y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

2. بين أنّ الدالة f_0 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_0(x) = \left(x^2 + 2x\right)e^{-x}$ حل للمعادلة (E) .

3. حل المعادلة التفاضلية (E') : $y' + y = 0$.

4. بين أنّ f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة u حيث $u = f - f_0$ حلا للمعادلة (E').
استنتج من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، عبارة $f(x)$ عندما تكون f حلا لـ (E) .

5. علما أنّ الدالة g المعرفة في الجزء الأوّل حل لـ (E) ، عين $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

6. عين الحل h للمعادلة (E) الذي تمثيله البياني يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه معدوما .

جزء ثالث :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x}$.

1. عين نهاية f عند كل من $+\infty$ وعند $-\infty$.
2. نعلم أنّ الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ؛ عين دالتها المشتقة وأدرس إشارتها . ثمّ أنجز جدول تغيراتها .
3. في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$) . نسمي $\left(C_f\right)$ المنحنى البياني للدالة f .

أ) عين معادلة لـ (d) مماس المنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة ذات الفاصلة -1 .

ب) أنشئ المماس (d) المنحنى $\left(C_f\right)$ في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

4. لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$.

أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

ب)أحسب مساحة الحيز المحددة بالمنحنى $\left(C_f\right)$ وبمحور التراتيب ومحور الفواصل والمستقيم الذي معادلته $x = 1$.

الموضوع الثاني : (20 نقطة)

تمرين 1 : (3نقاط)

لكل تأكيد من التأكيدات الأربعة التالية ثلاثة اقتراحات أ) ، ب) و ج) فقط واحد منها صحيح . يطلب تحديد الإقتراح الصحيح مع التبرير.

1. المعادلة $z^2=-16$ تقبل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

أ) حلا وحيدا . ب) حلين . ج) أربعة حلول .

2. عمدة للعدد المركب $\left(1+i\right)^{2009}$ هي :

أ) $\frac{\pi}{2}$. ب) $\frac{\pi}{4}$. ج) $\frac{3\pi}{4}$.

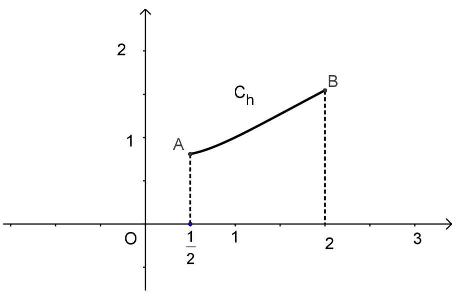
3. إذا كانت f حلا للمعادلة التفاضلية $y'=2y-2$ حيث $f(0)=\frac{3}{2}$ فإنّ :

أ) $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}$. ب) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+1$ ج) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{3}{2}$.

4. الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ حل للمعادلة التفاضلية ك

أ) $y''+4y=0$. ب) $y''-4y=0$. ج) $4y''+y=0$.

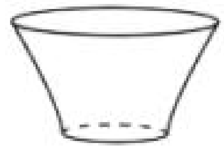
تمرين 2 : (3نقاط)



المنحنى C_h المقابل يمثل الدالة h المعرفة في المجال $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$ بـ :

$h(x)=\sqrt{1+x\ln x}$.

نقوم بتدوير المنحني C_h حول محور الفواصل فيتولد المجسم التالي



0. بين أنّ حجم المجسم الناتج V هو $V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x\ln x\right)dx$.

1. أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل التالي : $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x\ln x\,dx$

ب) استنتج قيمة الحجم V .

تمرين ثالث : (5 نقاط)

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$.

1. أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و الطولين AB و AC .

ب) استنتج قيمة مقربة إلى درجة واحدة للزاوية $\widehat{BAC}$.

ج) استنتج أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2. تحقق من أنّ معادلة للمستوي (ABC) هي : $2x-y+2z+2=0$.

3. ليكن المستويين P_1 و P_2 ذوي المعادلتين على الترتيب ، $x+y-3z+3=0$ و $x-2y+6z=0$.

بين أنّ المستويين P_1 و P_2 يتقاطعان وفق مستقيم (D) أحد تمثيلاته الوسيطية هو : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases}$.

4. بين أنّ المستقيم (D) و المستوي متقاطعان (ABC) . حدد إحداثيات نقطة تقاطعهما .

5. لتكن S سطح الكرة التي مركزها $\Omega(1;-3;1)$ ونصف القطر $r=3$.

أ) أعط معادلة ديكارتية لسطح الكرة S .

ب) أدرس تقاطع S مع المستقيم (D) .

ج) بيسن أنّ المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة S .

تمرين 4 : (4 نقاط)

1. في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ تعطى النقطتان A و B اللتان لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=2\sqrt{3}-2i$ و $z_B=2\sqrt{3}+2i$.

أ) أكتب العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي .

ب) بين أنّ المثلث OAB متقايس الأضلاع .

2. لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C=-8i$. والنقطة D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\dfrac{2\pi}{3}$.

أ) عين z_D لاحقة النقطة D .

ب) بين أنّ النقطة D صورة النقطة B بتحاك مركزه O يطلب تحديد نسبته .

ج) بين أنّ المثلث OAD قائم .

تمرين 5 : (6 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n-\ln\left(u_n^2+1\right)$.

جزء أوّل :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$

1. حل، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة $f(x)=x$.

2. أدرس إتجاه تغيرات الدالة f في المجال $[0;1]$.

استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ فإنّ $f(x)\in[0;1]$.

جزء ثان :

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n\in[0;1]$.

2. أدرس إتجاه تغيرات المتتالية (u_n).

3. بين أنّ المتتالية (u_n) متقاربة . عين نهايتها .